

FREE

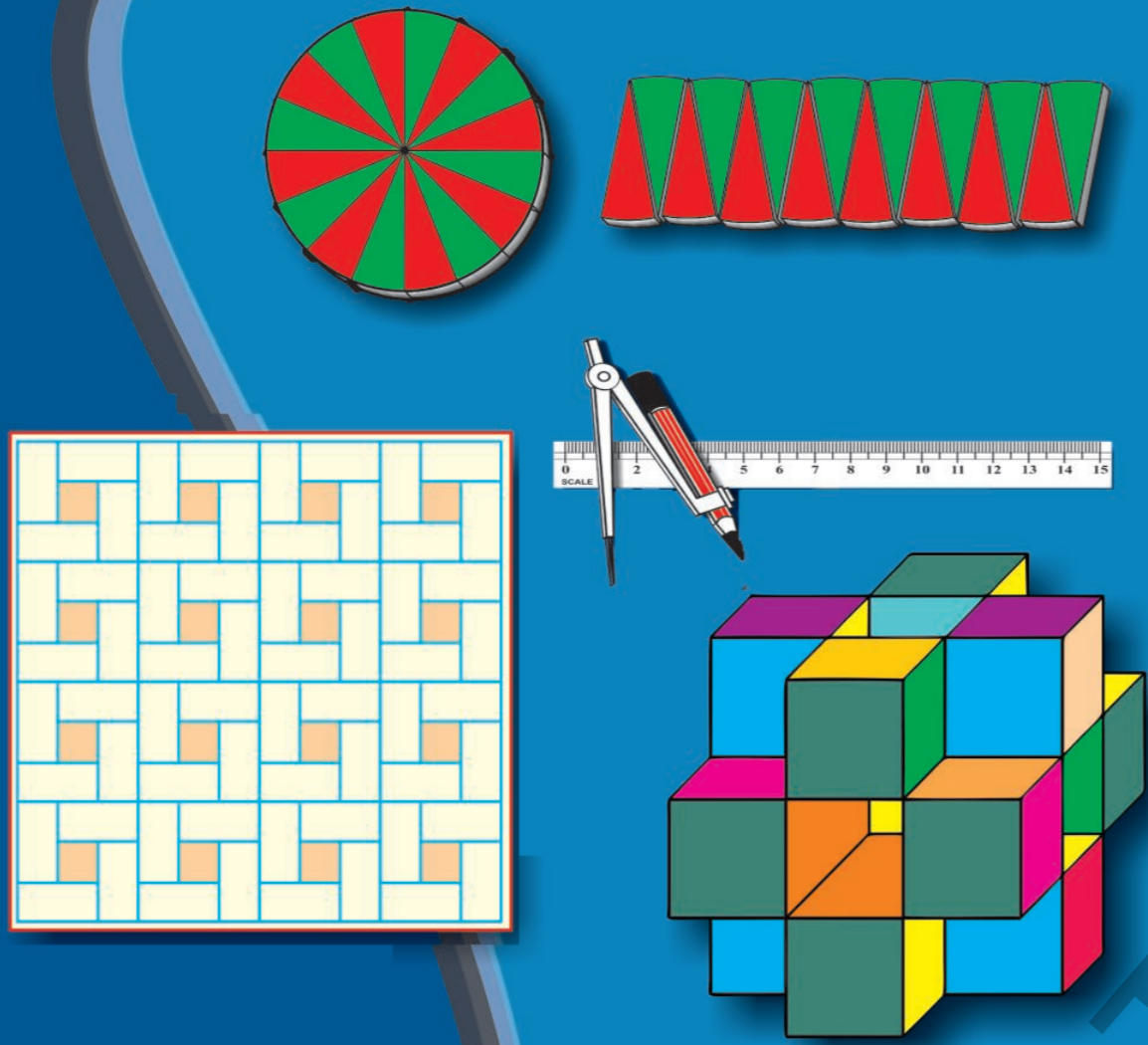
# ಗಣಿತ

ತರಗತಿ - VIII

Mathematics Kannada Medium  
Class VIII

ಗಣಿತ

ತರಗತಿ - VIII



**ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರ**  
ಮಹಿಳಾ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಶಿಶು ಕಲ್ಯಾಣ ಶಾಖೆ - ಬೈಲ್ಡಲ್ಯನ್ ಫೌಂಡೇಷನ್

ಶಾಲೆಯಲ್ಲಾಗಲಿ, ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಾಗಲಿ ವೇದನೆಗೆ ಗುರಿ ಆಗುತ್ತಿದ್ದರೆ

ಅಪತ್ತಿನಲ್ಲಿ, ಕಷ್ಟದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು

ಮಕ್ಕಳಿಂದ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿರುವವರನ್ನು ಶಾಲೆಗೆ ಕಳಿಸದೆ ಬೇರೆ ಕೆಲಸಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ

ಕುಟುಂಬದ ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ ಬಂಧುಗಳಾಗಲಿ ಇಬ್ಬರದಿಕ್ಕರವಾಗಿ ಅಸಭ್ಯವಾಗಿ ವರ್ತಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ

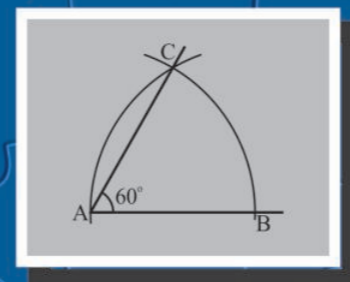
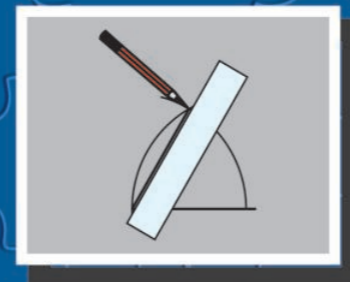
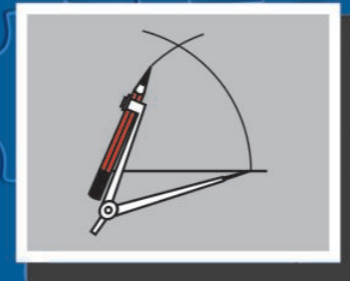
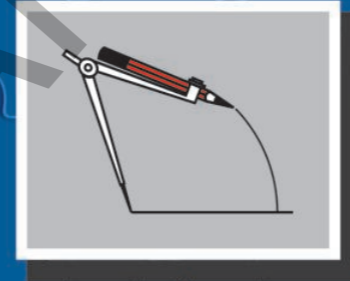
**CHILD LINE 1098**  
NIGHT & DAY  
24 HOUR NATIONAL HELPLINE

1098 (ಹತ್ತು - ಒಂಬತ್ತು - ಎಂಟು) ಉಚಿತ ಜಿಲಿಫೋನ್ ಸೇವಾ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಫೋನ್ ಮಾಡಿರಿ.



ರಾಷ್ಟ್ರವಿದ್ಯಾ, ಪರಿಶೋಧನೆ, ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಸ್ಥೆ  
ತೆಲಂಗಾಣ, ಹೈದರಾಬಾದು.

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ



ಪ್ರಚುರಣೆ :

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದವರಿಂದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ



ಗಣಿತ

ಐನೇ ತರಗತಿ

MATHEMATICS  
CLASS - VIII

(KANNADA MEDIUM)

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಚುರಣಾ ಸಮಿತಿ

ಪ್ರಧಾನ ನಿರ್ವಹಣಾಧಿಕಾರಿ : **ಶ್ರೀ ಎ.ಸತ್ಯನಾರಾಯಣ ರೆಡ್ಡಿ**  
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.  
ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಪ್ರಧಾನ ವ್ಯವಹಾರ ನಿರ್ವಾಹಕರು : **ಶ್ರೀ ಬಿ.ಸುಧಾಕರ್**  
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಮುದ್ರಣಾಲಯ,  
ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಪ್ರಭಾರಿ ನಿರ್ವಹಣಾಧಿಕಾರಿ : **ಡಾ.ಎನ್.ಉಪೇಂದರ್ ರೆಡ್ಡಿ** ಪ್ರೊಫೆಸರ್,  
ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ವಿಭಾಗ,  
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಹೈದರಾಬಾದ್

**ಅಧ್ಯಕ್ಷರು, ಗಣಿತ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರ, ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆ, ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಕಮಿಟಿ**

ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ವಿ. ಕನ್ನನ್

ಗಣಿತ - ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಹೈದರಾಬಾದ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ.

ಪ್ರಮುಖ ಸಲಹೆಗಾರರು

ಶ್ರೀ ಚುಕ್ಕಾರಾಮಯ್ಯ, ಶಿಕ್ಷಣ ತಜ್ಞರು,  
ತೆಲಂಗಾಣ, ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಡಾ. ಹೆಚ್.ಕೆ. ದಿವಾನ್, ವಿದ್ಯಾ ಸಲಹೆದಾರರು,  
ವಿದ್ಯಾಭವನ ಸೊಸೈಟಿ ರಿಸೋರ್ಸ್‌ಸೆಂಟರ್,  
ಉದಯಪುರ, ರಾಜಸ್ಥಾನ.



ಮುದ್ರಣ

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಪ್ರಚುರಣೆ, ಹೈದರಾಬಾದ್

ಕಾನೂನನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ  
ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಿ

ಶಿಕ್ಷಣದಿಂದ ಬೆಳೆಯಿರಿ.  
ವಿನಯಶೀಲರಾಗಿ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

© Government of Telangana, Hyderabad.

*First Published 2013*

*New Impressions 2014, 2015, 2017, 2018, 2019*

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telangana.

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho Title  
Page 200 G.S.M. White Art Card

తెలంగాణ సర్కారద టటికె వికరణె 2019-20

---

*Printed in India*  
at the Telangana Govt. Text Book Press,  
Mint Compound, Hyderabad,  
Telangana.

# ಪತ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಸಮಿತಿ

## ಸದಸ್ಯರು

**ಶ್ರೀ ತಾತ ವೆಂಕಟ ರಾಮ್ ಕುಮಾರ್**

ಮುಖ್ಯ ಗುರುಗಳು, ಜಡ್.ಪಿ. ಹೆಚ್.ಎಸ್, ಮುಲುಮುಡಿ, ನೆಲ್ಲೂರು.

**ಶ್ರೀ ಸೋಮ ಪ್ರಸಾದ್ ಬಾಬು**

ಪಿ.ಜಿ.ಟಿ, ಎ.ಪಿ.ಟಿ.ಡಬ್ಲ್ಯು.ಆರ್.ಎಸ್., ಚಂದ್ರಶೇಖರಪುರಂ, ನೆಲ್ಲೂರು

**ಶ್ರೀ ಕೊಮಂದೂರಿ ಮುರಳಿ ಶ್ರೀನಿವಾಸ್**

ಪಿ.ಜಿ.ಟಿ, ಎ.ಪಿ.ಟಿ.ಡಬ್ಲ್ಯು.ಆರ್.ಎಸ್. ಸ್ಕೂಲ್ ಆಫ್ ಎಕ್ಸಲೆನ್ಸ್, ಶ್ರೀಶೈಲಂ.

**ಶ್ರೀ ಪಡಾಲ ಸುರೇಶ್ ಕುಮಾರ್**

ಎಸ್.ಎ.ಜಿ.ಎಚ್.ಎಸ್, ವಿಜಯನಗರ ಕಾಲೋನಿ, ಹೈದರಾಬಾದ್.

**ಶ್ರೀ ಪಿ.ಡಿ.ಐ.ಗಣಪತಿ ಶರ್ಮ**

ಎಸ್.ಎ.ಜಿ.ಎಚ್.ಎಸ್, ಜಮೀನ್ದಾರ್ ಪುರ್, ಮನಿಕೇಶ್ವರ್ ನಗರ್, ಹೈದರಾಬಾದ್.

**ಶ್ರೀ ದುಗ್ಗರಾಜು ವೇಣು**

ಎಸ್.ಎ.ಯು.ಪಿ.ಎಸ್, ಅಲ್ಲವಾಡ, ಚೇವೇಳ್ಳ ಮಂಡಲ್, ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ.

**ಶ್ರೀ ಪಿ.ಆಂಶೋನಿ ರೆಡ್ಡಿ**

ಮುಖ್ಯ ಗುರುಗಳು, ಸೇಂಟ್ ಪೀಟರ್ ಫ್ರಾಡೆಶಾಲೆ, ಆರ್.ಎನ್.ಪೇಟೆ, ನೆಲ್ಲೂರು.

**ಶ್ರೀ ಡಿ.ಮನೋಹರ್**

ಎಸ್.ಎ.ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್, ಬ್ರಾಹ್ಮಣಪಲ್ಲಿ, ತಾಡ್ವಾಯಿ ಮಂಡಲ್, ನಿಜಾಮಾಬಾದ್

**ಶ್ರೀ ಗೊಟ್ಟುಮುಕ್ಕಲ ಬಿ.ಎಸ್.ಎನ್.ರಾಜು**

ಎಸ್.ಎ., ಮುನಿಪಲ್ ಹೈಸ್ಕೂಲ್, ಕಸ್ತೂರಿ, ವಿಜಯನಗರಂ.

**ಶ್ರೀ ಕೆ.ವರದ ಸುಂದರ್ ರೆಡ್ಡಿ**

ಎಸ್.ಎ.ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್, ತಕ್ಕಶಿಲ, ಅಲಂಪೂರ್ ಮಂಡಲ, ಮಹಬೂಬ್ ನಗರ್.

**ಶ್ರೀ ಅಬ್ದುರಾಜು ಕಶೋರ್**

ಎಸ್.ಜಿ.ಟಿ, ಎಂ.ಪಿ.ಯು.ಪಿ.ಎಸ್., ಚಿಮಳ್ಳಮುಡಿ, ಗುಂಟೂರು.

**ಶ್ರೀ ಅನಂತ ರೆಡ್ಡಿ**

ನಿವೃತ್ತ ಮುಖ್ಯ ಗುರುಗಳು, ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ

**ಶ್ರೀ ಎಂ.ರಾಮಾಂಜನೇಯುಲು**

ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಡಯಟ್, ವಿಕಾರಬಾದ್, ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ

**ಶ್ರೀ ಎಂ.ರಾಮಾಚಾರಿ**

ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಡಯಟ್, ವಿಕಾರಬಾದ್, ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ

**ಡಾ.ಎ.ರಾಂಬಾಬು**

ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪಿ.ಟಿ.ಇ, ವರಂಗಲ್.

**ಡಾ.ಪೂಂಜ್ ರಮೇಶ್**

ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಐ.ಎ.ಎಸ್.ಇ, ನೆಲ್ಲೂರು.

## ಸಂಪಾದಕರು

**ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ವಿ.ಶಿವ ರಾಂಪ್ರಸಾದ್**

ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಉಸ್ತಾನಿಯಾವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹೈದರಾಬಾದ್.

**ಡಾ.ಸುರೇಶ್ ಬಾಬು**

ಪ್ರೊಫೆಸರ್, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಹೈದರಾಬಾದ್

**ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ಎನ್.ಚ.ಪಟ್ಟಾಬಿ ರಾಮಾಚಾರ್ಯುಲು**

ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್, ಎನ್.ಇ.ಟಿ., ವರಂಗಲ್.

**ಶ್ರೀ ಕೆ.ಬ್ರಹ್ಮಯ್ಯ**

ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್, ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಹೈದರಾಬಾದ್.

## ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿಗಳು

**ಶ್ರೀ ಕಾಕುಳವರಂ ರಾಜೇಂದರ್ ರೆಡ್ಡಿ**

ಎಸ್.ಎ.ಯು.ಪಿ.ಎಸ್, ಚಂದಂಪೇಟ್, ನೆಲ್ಲೂಂಡ.

**ಶ್ರೀ ತಾತ ವೆಂಕಟ ರಾಮ್ ಕುಮಾರ್**

ಮುಖ್ಯಗುರುಗಳು, ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್, ಮುಲುಮುಡಿ, ನೆಲ್ಲೂರು.

## ಕನ್ನಡ ಅನುವಾದಕರು

**ಶ್ರೀ ಡಿ.ಪ್ರಭಾಕರ್** ಎಸ್.ಎ

ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್, ಹೆಚ್.ಸಿದ್ದಾಪುರಂ, ಅನಂತಪುರಂ.

**ಶ್ರೀ ಟಿ.ಎಸ್. ಹನುಮಂತರಾಯಪ್ಪ** ಎಸ್.ಎ,

ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್, ಡಿ.ಹಿರೇಹಾಳ್, ಅನಂತಪುರಂ

**ಶ್ರೀಮತಿ ಜೆ.ಜಯಶ್ರೀ** ಎಸ್.ಎ,

**ಶ್ರೀ ಸಿ. ನಾಗರಾಜ್** ಎಸ್.ಎ.

ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣ ಮಹಬೂಬನಗರ.

**ಶ್ರೀ ಸೋಮನಾಥ್ ರೆಡ್ಡಿ** ಎಸ್.ಎ.

ಜಡ್.ಪಿ.ಹೆಚ್.ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣ ಮಹಬೂಬನಗರ.

## ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಹಾಯ ಸಮಿತಿ ಸದಸ್ಯರು

**ಶ್ರೀ ಇಂದರ್ ಮೋಹನ್**

**ಶ್ರೀ ಯಶ್ವಂತ ಕುಮಾರ್ ದವೆ**

**ಶ್ರೀ ಹನಿಫ್ ಪಾಲಿವಾಲ್ ಶ್ರೀ ಆಶಿಷ್ ಚಂದ್ರ**

ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ, ರೀಸೋರ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್, ಉದಯಾಪೂರ್, ರಾಜಸ್ಥಾನ್.

**ಶ್ರೀ ಶರಣ್ ಗೋಪಾಲ್**

**ಕುಮಾರಿ ಎಂ.ಆರ್.ನ**

**ಶ್ರೀ ಪಿ.ಚಿರಂಜೀವಿ**

ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಹೈದರಾಬಾದ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ

## ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸ ಸಮಿತಿ

**ಶ್ರೀ ಪ್ರಶಾಂತ್ ಸೋನಿ**

**ಶ್ರೀ ಷೇಕ್ ಷಕೀರ್ ಅಹ್ಮದ್**

**ಶ್ರೀ ಎಸ್.ಎಂ.ಇಕ್ರಂ**

ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ, ರೀಸೋರ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್, ಉದಯಾಪೂರ್, ರಾಜಸ್ಥಾನ್.

ಮಾನವನ ವಿಕಾಸಕ್ಕೆ, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವಾದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ವಿದ್ಯೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮೂಲಾಧಾರ .ವಿದ್ಯೆಗಿರುವ ಈ ಅದ್ಭುತವಾದ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮುನ್ನಡೆಯುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಜಗಳು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ವಿದ್ಯೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಗುಣಾತ್ಮಕ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ಮನಸ್ತತ್ವದಿಂದ ಮುಂದೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಲು ಸೆಕೆಂಡರಿ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ಸಹ ಸಾರ್ವಜನೀಯಗೊಳಿಸುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕೋನ್ನತ ಮಟ್ಟದವರೆಗೂ ಕಲಿತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸಮ್ಮಿಳಿತ ಗೊಳಿಸಿ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸುವಂತೆ, ಪ್ರೌಢ ಶಿಕ್ಷಣವು ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇತು ಬದ್ಧವಾಗಿ ಕಲಿಯಲು, ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದು, ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದನ್ನು ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವೆಂಬುದು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಬೋಧನಾ ವಿಷಯ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿ ವಿಷಯದೊಂದಿಗೆ ಅವಿನಾಭಾವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಕಾರಣಗಳಿಂದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡಲು ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರೂ ಗಣಿತವನ್ನು ಸಂತೋಷದಿಂದ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವುದಲ್ಲದೇ, ಅವರ ಜೀವನದ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಮೂಲ ಅಂಶಗಳು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾನು ಪ್ರಭಲವಾಗಿ ನಂಬಿದ್ದೇನೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತವನ್ನು ಅಂಕಗಳ ಸಾಧನೆಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮಿಳಿತಗೊಂಡಿರುವ ಅಮೂಲ್ಯ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತು ಕೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಬೋಧನಾ ಆಭ್ಯಾಸ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಭಾಗವಾಗಿ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲೂ, ಎಲ್ಲಾ ಮಟ್ಟದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಲುದಾರರಾಗುವಂತೆ ಶ್ರಮವಹಿಸಬೇಕು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಮೂಡಿಸಿ, ಅವರಲ್ಲಿ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸ ಬೆಳೆಯುವಂತೆ ಬೋಧನೆಯು ಮುಂದುವರಿದಲ್ಲಿ ಅದು ಅವರ ಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಗುರಿಸಾಧನೆಗೆ ದಾರಿ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯ ಕಾಯ್ದೆ (SCF - 2011) ಯ ವಿಶಾಲ ಮನಸ್ತತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರೂಪಿಸಿದ ಗಣಿತ ಆಧಾರ ಪತ್ರದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಿರ್ದರಿಸಿದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವು ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಸಹಕರಿಸುವಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ.

ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಆಕರ್ಷಣೀಯವಾಗಿ, ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ಸರಿ ಹೊಂದಿಸುವಲ್ಲಿ ಅವಿಶ್ರಾಂತ ಶ್ರಮವಹಿಸಿದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಂಡಳಿ ಸದಸ್ಯರಿಗೆ, ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರೂಪಿಸುವಲ್ಲಿ ಭಾಗಗಳಾದ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರಿಗೆ ಆಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ, ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಪರಿಶೋಧನಾ ಸಂಸ್ಥೆಯು ಆಭಿನಂದಿಸುತ್ತದೆ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಇಲಾಖಾ ಪರವಾಗಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಜಿಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾ ಶಾಖಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಮಂಡಲ ಶಿಕ್ಷಣಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಪಾಠ ಶಾಲೆಯ ಮುಖ್ಯೋಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳಿಗೆ ಧನ್ಯವಾದಗಳನ್ನೂ ತಿಳಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಮುಂದೆ ನಿಂತು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿದ ಕಮೀಷನರ್ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪಾಠಶಾಲೆ ವಿದ್ಯೆ, ಆಂಧ್ರ ಪ್ರದೇಶರವರಿಗೂ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾಭವನ ಸೊಸೈಟಿ ಉದಯಪುರ್, ರಾಜಾಸ್ಥಾನರವರಿಗೂ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಮುಂಬರುವ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತಷ್ಟು ಮೌಲ್ಯಧಾರಿತವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡೆಯಲು ನಿಮ್ಮೆಲ್ಲರ ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳು ನಿಮ್ಮಿಂದ ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ಥಳ : ಹೈದರಾಬಾದ್

ದಿನಾಂಕ : ಡಿಸೆಂಬರ್ 26, 2012

ಸಂಚಾಲಕರು

ರಾಷ್ಟ್ರ ಶಿಕ್ಷಣಾ ಪರಿಶೋಧನೆ ಸಂಸ್ಥೆ ಹೈದರಾಬಾದ್

ವಿದ್ಯಾ ಪ್ರಣಾಳಿಕಾ ಕಾಯ್ದೆ (SCF - 2011) ಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಅನೇಕ ಸಿಫಾರಸುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾದ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಲಿಕೆ, ಪಾಠಶಾಲೆ ಹೊರಗಿನ ಜೀವನದೊಂದಿಗೆ ಮಿಲಿತಗೊಂಡಬೇಕು, ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರವು ಎಲ್ಲ ತರಗತಿಗಳಿಗೂ ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿ ಪಡಿಸಲು ನಿರ್ಣಯಿಸಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಣ ಹಕ್ಕಿನ ಕಾಯ್ದೆಯ (RTE - 2009) ಪ್ರಕಾರ 14 ವರ್ಷ ವಯಸ್ಸಿನವರೆಗೂ ಶಾಲೆಗೆ ಸೇರಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಗುವೂ, ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ತಪ್ಪದೇ ಪಡೆಯಲು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ವಿದ್ಯಾ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಕಾಯ್ದೆ - 2005 ರ ಪ್ರಕಾರ, ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶ ಗೊಳಿಸಿದ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲಾ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ, ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳು, ನೈಪುಣ್ಯತೆಗಳು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಕಲಿಯುವುದರ ಮೂಲಕ, ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ರೀತಿಯ ಸದವಕಾಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅವಕಾಶ ಒದಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ದೇಶದ ಭವಿಷ್ಯತ್ ಎಂಬುದು ಮುಂಬರುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟು, ವಿಜ್ಞಾನ, ತಾಂತ್ರಿಕ ರಂಗಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಿ ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಬಲಿಷ್ಠವಾದ ಗಣಿತ ಆಧಾರಿತ ತಾಂತ್ರಿಕ ಯುಗಕ್ಕೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಗೊಳಿಸುವುದು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯು ಮೂರು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಪ್ರಾಥಮಿಕೋನ್ನತ, ಮತ್ತು ಪ್ರೌಢ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಂತಗಳ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಡಿಯಲ್ಲಿ, ಚಕ್ರೀಯ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರೌಢ ಶಾಲಾ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಉನ್ನತ ತರಗತಿಗಳ ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯಾ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಪ್ರಾಥಮಿಕೋನ್ನತ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಗಣಿತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು, ಅನ್ವಯಿಸಲು ಮತ್ತಷ್ಟು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಸಹಕರಿಸಬೇಕು.

ಪಾಠ್ಯ ವಿಷಯಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮೂಲ ಭೂತ ಗಣಿತದ ಅಂಶಗಳು, ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಅನ್ವೇಷಣೆ, ತಿಳುವಳಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧರಿಸಿ ಊಹಿಸಿದ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಚುರುಕಿನಿಂದ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಂತೆ ಸಯವಯಸ್ಕರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವಂತೆ, ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಕಲಿಕಾ ಬೋಧನೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ 8ನೇ ತರಗತಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಪರಿಶೋಧನೆ ಸಂಸ್ಥೆಯವರಿಂದ ರೂಪಿಸಿರುವ ಗಣಿತ ವಿದ್ಯಾಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು, ಶಿಕ್ಷಣ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟು ಕೊಂಡು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ.

- ಈ ತರಗತಿಯ ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಆರು ಮುಖ್ಯರಂಗಗಳೆಂದರೆ, 1) ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆ 2) ಬೀಜಗಣಿತ 3) ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ ಎಂದು ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಯನಗಳನ್ನು ಬೋಧಿಸುವ ಮೂಲಕ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ, ಹೇತು ಬದ್ಧವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸುವುದು, ಗಣಿತ ಭಾವ ವ್ಯಕ್ತೀಕರಣ, ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಪಡಿಸುವಿಕೆ, ಮತ್ತು ಗಣಿತವನ್ನು ಮಿಕ್ಕ ಅಂಶಗಳೊಂದಿಗೂ, ದೈನಂದಿನ ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅನ್ವಯ ಮಾಡುವಿಕೆಯ ಕೌಶಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿತ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ ಶಿಕ್ಷಣ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಅವಕಾಶವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಸ್ವೇಚ್ಛಾವಾತಾವರಣದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಬೃಂದಗಳಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೋಡಲಾಗಿದೆ.

**ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟತೆಗಳು :**

- ಪಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರೂಪಿಸಿದ ಅಧ್ಯಯನಗಳನ್ನು ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಟರ್ಮಿನಲ್ಲೂ ವಿವಿಧ ರಂಗಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಶಗಳು ಕಲಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೀಕರಣ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.
- ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಬೋಧನೆ ಎಂಬುದು ಪ್ರಾಥಮಿಕೋನ್ನತ ಹಂತದವರೆಗೂ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಹಜ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಲೋಚನಾ ದೃಷ್ಟಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ಆಳತೆಗಳನ್ನು ಅಳಿಸುವುದು, ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಮಡಿಸುವಂತಹ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಆಕರ್ಷಣೆ.

- ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ, ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳು ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸದಾ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೌಲ್ಯಾಂಕನ ಮಾಡಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತವೆ.
- ಕೆಲವು ಉಪ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ ನಂತರ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಾವೇ ಸಾಧಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಅದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಲಿಕೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಅವಕಾಶಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
- ಒಟ್ಟು ಪಾಠ್ಯಾಂಶವನ್ನು 15 ಅಧ್ಯಾಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಕೂಲಂಕುಷವಾಗಿ, ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಹೇತು ಬದ್ಧವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಲು, ಕಲಿಕಾ ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹಿಡಿತ ಸಾಧಿಸಲು, ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಲಿಯಲು, ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಬೆಳೆಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.
- ಬಣ್ಣ ಬಣ್ಣದ ವರ್ಣ ಚಿತ್ರಗಳು ಓದು ಬಹುದಾದ ಆಕ್ಷರಗಳ ಗಾತ್ರವು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಬಗ್ಗೆ ಉತ್ತಮ ಆಭಿಪ್ರಾಯ ಮೂಡಿಸಿ, ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಕಡೆ ಶ್ರದ್ಧಾವಹಿಸಲು ಸಹಾಯ ನೀಡುತ್ತವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (1) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆ ರಂಗದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೂ ಎಂತಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ವಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು ಉತ್ತಮ ಸೂಕ್ತ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲು ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಪಡಿಸಲು, ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತಾರೆ. ಅಧ್ಯಾಯ (6) ವರ್ಗಗಳು ಮತ್ತು ವರ್ಗಮೂಲಗಳಲ್ಲಿ ಗ್ರಹಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲೂ ಭಾಗಾಹಾರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತಾರೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಘನಗಳು, ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಸಹ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (2) (4) (11) ಮತ್ತು (12) ಗಳಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದದ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದದ ಬೆಲೆಯನ್ನು, ಆ ಪದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ (ಪಾರ್ಶ್ವ ಬದಲಿಸುವ) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೋ ಅಂತಹ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಅಧ್ಯಾಯಗಳು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳು, ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ  $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ ,  $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$  ಮತ್ತು  $(x \pm a)(x \pm b) = x^2 \pm (a + b)x + ab$  ಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಚರಾಕ್ಷರ ಮೌಲ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿರುವುದಲ್ಲದೇ, ಜ್ಯಾಮಿತಿ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಪವರ್ತನಗಳ ವಿಭಜನೆಯಲ್ಲಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದಲ್ಲದೇ, ಅನೇಕ ಇತರ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಲು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (5) ರಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತ, ಸಮಾನುಪಾತ, ಮಿಶ್ರ ಅನುಪಾತ, ಶೇಕಡಾ ಸುಂಕ (ಶೇಕಡಾ ಸುಂಕ), ಲಾಭನಷ್ಟಗಳು, ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಿಕೆ ವರ್ಷ, ಅರ್ಧವರ್ಷ ತ್ರೈಮಾಸಿಕ ಕಾಲಗಳಲ್ಲಿ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಿಕೆಗೆ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅಧ್ಯಾಯ (10) ರಲ್ಲಿ ಅನುಲೋಮ, ವಿಲೋಮಾನುಪಾತವನ್ನು ದೈನಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಸಾಧಿಸುವಂತೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ (15) ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಿಳಿತಗೊಂಡಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿವಿಧ ಭಾಜನೀಯತೆಯ ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರವಾಗಿ ನೂತನ ಸೂತ್ರಗಳ ಅವಿಷ್ಕಾರಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ, ಪದಕೇಳಿಗಳ ಮೂಲಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಪರಿಶೋಧನೆಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದು ಊಹಾಜನಿತ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರೇರೇಪಿಸುವ ಚಿತ್ರಗಳ ನಿರ್ಮಾಣದ ಕಡೆಗೆ ದೃಷ್ಟಿಸಾರಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.



ಅಧ್ಯಾಯ (3) ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳು ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪುನಃವಿವರಿಸುವುದಲ್ಲದೇ, ಏಕೈಕ ಚತುರ್ಭುಜ ಬೇರ್ಪಡಿಸುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ವಿವಿಧ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನಿರ್ಮಾಣ ಮಾಡುವ ಸೂಕ್ತ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅಧ್ಯಾಯ (8) ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯ (13) 3D ವಸ್ತುಗಳನ್ನು 2D ಚಿತ್ರಗಳನ್ನಾಗಿ ರೂಪಿಸುವುದಕ್ಕೆ, 3D ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅನೇಕ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿದೆ.

ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ ಎಂಬುದು ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಧಾನ ಭಾಗ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ತನ್ನ ಸುತ್ತಲೂ ನೋಡಿದ, ಶೇಖರಿಸಿದ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಗ್ರಾಫ್‌ಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಿರೂಪಿಸುವುದು ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶ, ಅಧ್ಯಾಯ (7) ಆವರ್ತ ವಿತರಣಾಪಟ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಆಯತ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕುರಿತು, ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಕುರಿತು, ಓಗೀವ್ ವಕ್ರಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಬಹುಳಕ ತಿಳಿಯಲು ಸೂಕ್ತ ಉದಾಹರಣೆ, ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಕೇಂದ್ರಿಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳು ತಿಳಿಯಲು ಅನೇಕ ಪರ್ಯಾಯ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಅಧ್ಯಾಯ (9) ರಲ್ಲಿ ಸಮತಲ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಟ್ರಿಪೀಜಿಯಂ (ತ್ಯಾಪಿಜ್ಯ) ಚತುರ್ಭುಜ, ವೃತ್ತ, ಕಂಕಣ ಮತ್ತು ಸೆಕ್ಟರ್‌ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಯ (14) ರಲ್ಲಿ ಘನ, ಆಯತ ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು, ಘನ ಫಲಗಳಿಗೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸೂಕ್ತ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಉತ್ತಮ ಪುಸ್ತಕವೊಂದೇ ಗುಣಾತ್ಮಕ ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ಕೊಡಲಾರದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕವಾಗಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾರದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕವಾಗಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿ, ತಮ್ಮಷ್ಟಕ್ಕೆ ತಾವೇ ಕಲಿತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಪಡಿಸಿಕೊಂಡು, ಆದರ ಮೂಲಕ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಾಧನೆಗೆ ಸೂಕ್ತ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸುವಂತೆ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸ ಬೇಕು.

ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ತರಗತಿ ಭೋಧನೆ ಎಂದರೆ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕುರುಡು ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿಸುವುದಲ್ಲದೇ, ಕಲಿಕಾ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಿ ಹೇತುಬದ್ಧವಾಗಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನಾ ಕೌಶಲ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ತುಂಬಾ ಇದೆ.

-ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಕಮಿಟಿ

# “ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯಾಂಶ”

## ಜಾರ್ಜ್ ಪೋಲ್ಯಾ (1887 - 1985)

ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ ಎಂಬುದು ಕಲಿಯುವ ಅಂಶವೇ ? ಇಲ್ಲವೇ ಇದು ಕೆಲವರು ಬುದ್ಧಿವಂತರಿಗಿರುವ ಸಹಜ ಸಿದ್ಧವಾದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವೇ ? ಎನ್ನುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಪ್ರಪಂಚದ್ಯಾಂತ ಎಲ್ಲರೂ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇದಕ್ಕೆ ಖಚಿತವಾದ, ಅನುಮೋದಿಸಲ್ಪಡುವ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಮೊದಲ ವ್ಯಕ್ತಿಯೇ ಕೀ. ಶೇ. ಜಾರ್ಜ್ ಪೋಲ್ಯಾ ಈತನ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ ನೈಪುಣ್ಯ ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಕಲಿತು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಅಂಶ ಇದಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಈತನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಪೋಲ್ಯಾ ಹಂಗೇರಿ ದೇಶದಲ್ಲಿ 1887ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಜನ್ಮಿಸಿದ್ದಾರೆ. “ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಆಫ್ ಬುಡಾ ಪೆಷ್ಟ್” ನಿಂದ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಡಾಕ್ಟರೇಟ್ ಪದವಿ ಪಡೆದರು ಜ್ಯೂರಿಚ್‌ನಲ್ಲಿನ ಸ್ವಿಸ್ ಫೆಡರಲ್ ಇನ್ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್ ಟೆಕ್ನಾಲಜಿಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ಕಾಲ ಆಚಾರ್ಯರಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ರಚಿಸಿದ ಅನೇಕ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುವಂತಹದು ‘How to Solve I’ (1945) ಇದು ಸುಮಾರು 17 ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ತರ್ಜುಮೆಯಾಗಿ ಸುಮಾರು ಒಂದು ಮಿಲಿಯನ್ ಪ್ರತಿಗಳು ಮಾರಾಟವಾಗಿವೆ. ಪೋಲ್ಯಾ ಹೇಳಿದ ನಾಲ್ಕು ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳು



ಜಾರ್ಜ್ ಪೋಲ್ಯಾ (1887-1985)

### I. ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು (Understand the problem)

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಕುರಿತು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಅವರ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸಬೇಕೋ ತಿಳಿಯದೆ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗೆ ನೋಡುತ್ತಿರುತ್ತಾರೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಾದರೂ ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳದಿರುವುದೇ ಇದನ್ನು ಅಧಿಗಮಿಸಲು ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಬಹುದು.

- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ಪದಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆಯೇ ? ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತ ನಿರ್ಘಂಟುನಲ್ಲಿ ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು
- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಸ್ವಂತ ಮಾತುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಇನ್ನಾವ ವಿಧದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಬರೆಯಬಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.
- ಮೂಲ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾದ ಮಾತುಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವೇನು ? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದೇ ? ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನಾಗಲೀ, ಚಿತ್ರವನ್ನಾಗಲೀ ಇದರ ಗ್ರಹಿಕೆಗಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದೇ ? • ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ಬೇಕಾದ ಸಮಾಚಾರವೆಲ್ಲಾ ಕೊಡಲಾಗಿದೆಯೇ ? ಇದು ಸರಿಹೋಗುತ್ತದೆಯೇ ?
- ಅನವಶ್ಯಕವಾದ ಸಮಾಚಾರ ಯಾವುದಾದರೂ ಇದೆಯೇ ? ಮುಖ್ಯ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ಬೇಕಾದ ಸಮಾಚಾರವೇನು ?

### II. ಯೋಜನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ: (Devise a plan)

ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿ ನಂತರ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಮತ್ತಷ್ಟು ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಒಂದು ಯೋಜನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಭಯ ಪಡಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕವಿಲ್ಲ ನೀವು ಸಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಗಾಗಿ ಹೇತುಬದ್ಧವಾದ ಅನೇಕ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದು ಪದ್ಧತಿಗಳು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ. ಕೆಲವು ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ಆನಂತರ ತಪ್ಪದೆ, ನಮಗೆ ಸರಿಯಾದ ಪದ್ಧತಿ ಖಚಿತವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪದ್ಧತಿಗಳು ಯಾವುವೆಂದರೆ.

- ಊಹಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸರಿ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು • ಜೋಡಣೆಗಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದು • ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು
- ನಕ್ಷೆ ಹಾಕುವುದು • ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಾಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು • ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ತೊಲಗಿಸುವುದು • ಇದೇ ವಿಧವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು • ಅನುರೂಪ ವಿರುವ ಮತ್ತಷ್ಟು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು • ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು. • ಉಪಕರಣವನ್ನು ಬಳಸುವುದು • ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು • ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ನೋಡುವುದು
- ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು • ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು • ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು • ಚತುರತೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವುದು.

### III. ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವುದು (Carryout the plan)

ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತರಲು ಅದನ್ನು ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವುದು ಸುಲಭಕರವಾದ ಕೆಲಸ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದ ಶ್ರದ್ಧೆ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕೌಶಲ್ಯ ಹೊಂದಿರಬೇಕು ಯೋಜನೆಯು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಜಾರಿಗೊಳ್ಳದಿದ್ದರೂ ದೃಢವಾಗಿರಬೇಕು ಇನ್ನೂ ಯೋಜನೆ ಈಡೇರದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಒಟ್ಟು ಹೊಸ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಜಾರಿ ಗೊಳಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಇದು ನೀವು ತಪ್ಪೆಂದು ಭಾವಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಅನೇಕ ಜನ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ವೃತ್ತಿ ನಿಪುಣರು ಇದೇ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಆಚರಣೆಗೆ ತರುತ್ತಾರೆ.

### IV. ಮತ್ತೆ ನೋಡುವುದು(Look back)

ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ ನಂತರ ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪುನಃ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿದರೆ ನಾವು ತುಂಬಾ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ನಾವು ಕೊಟ್ಟ ಸಾಧನೆ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಸತ್ಯವಾದದ್ದೋ ಸರಿನೋಡಿ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದೇ ಗಣಿತಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಲು ಮೂಲಾಧಾರ ಇದರಿಂದ ಮತ್ತಷ್ಟು ಉತ್ತಮ ಆಲೋಚನೆಗಳು ಬರುವುದೇ ಅಲ್ಲ ಅಪರಿಷ್ಕೃತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.

## ಗಣಿತ 8ನೇ ತರಗತಿ

### ಪರಿವಿಡಿ

ಪು.ಸಂ	ಅಧ್ಯಾಯಗಳು	ಮುಗಿಸುವ ಅವಧಿ	ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆ
1	ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಏಪ್ರಿಲ್/ಜೂನ್	1-33
2	ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು	ಜೂನ್/ಜುಲೈ	34-58
3	ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳು	ಜುಲೈ	59-80
4	ಘಾತಾಂಕಗಳು	ಜುಲೈ	81-95
5	ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು	ಆಗಸ್ಟ್	96-121
6	ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಘನ ಮೂಲಗಳು	ಆಗಸ್ಟ್	122-147
7	ಆವರ್ತ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಗಳು	ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್	148-180
8	ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಪರಿಶೋಧನೆ	ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್	181-198
9	ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು	ಅಕ್ಟೋಬರ್	199-230
10	ನೇರ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳು	ನವಂಬರ್	231-247
11	ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು	ನವಂಬರ್	248-266
12	ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ	ಡಿಸೆಂಬರ್	267-281
13	2D ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು 3D ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡುವುದು	ಜನೆವರಿ	282-296
14	ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನ ಫಲಗಳು (ಘನ - ಆಯತ ಘನ )	ಜನೆವರಿ/ಫೆಬ್ರವರಿ	297-310
15	ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡೋಣ !	ಫೆಬ್ರವರಿ	311-336

## ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

- ರವೀಂದ್ರನಾಥ ತಾಗೂರ್

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯ ಹೇ |  
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ ||  
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧ್ ಗುಜರಾತ ಮರಾಠಾ |  
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗಾ ||  
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ |  
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿ ತರಂಗಾ ||  
ತವ ಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ |  
ತವ ಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ ||  
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯ ಗಾಥಾ |  
ಜನಗಣ ಮಂಗಳದಾಯಕ ಜಯೇ ಹೇ ||  
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ |  
ಜಯ ಹೇ ! ಜಯ ಹೇ ! ಜಯ ಹೇ ||  
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಹೇ |

## ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

“ಭಾರತ ದೇಶ ನನ್ನ ಮಾತೃಭೂಮಿ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರರು. ವೈವಿಧ್ಯಮಯ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಲಕ್ಷಣವು ನನಗೆ ಅತೀವ ಹೆಮ್ಮೆ ತಂದಿದೆ. ಈ ದೇಶದ ಉನ್ನತ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ತಲುಪಲು ನಾನು ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇನೆ

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಸುಸಂಪನ್ನವಾದ ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನೂ, ನನ್ನ ತಂದೆ ತಾಯಿಗಳನ್ನೂ, ಉಪಾಧ್ಯಾಯರನ್ನೂ ಎಲ್ಲ ಹಿರಿಯರನ್ನೂ ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೊಡನೆ ಮರ್ಯಾದೆಯಿಂದ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ನನ್ನ ದೇಶದ ಬಗ್ಗೆ ನನ್ನ ಪ್ರಜೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಸೇವಾ ನಿಷ್ಠೆ ಪಡೆದಿರುವೆನೆಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆ. ಅವರ ಶ್ರೇಯೋಭಿವೃದ್ಧಿಗಳೇ ನನ್ನ ಆನಂದಕ್ಕೆ ಮೂಲ.”

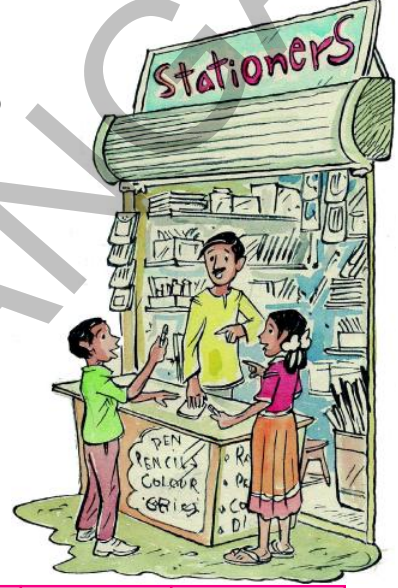
## ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

### 1.0 ಪರಿಚಯ

ಒಂದೊಂದಕ್ಕೆ ಐದು ರೂಪಾಯಿಗಳಂತೆ ಸಲ್ಮಾ ಮೂರು ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು, ಸತೀಷ್ ಎರಡು ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಿ ಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಹೋಲ್‌ಸೇಲ್ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋದರು. ಐದು ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪ್ಯಾಕೆಟ್ ಬೆಲೆ ₹ 22 ಗಳೆಂದು ಅಂಗಡಿಯವನು ಹೇಳಿದನು. ಅವರು ಒಂದು ಪ್ಯಾಕೆಟ್ ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡರೆ ಒಂದೊಂದು ಪೆನ್ನುನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$$\text{ಒಂದು ಪೆನ್ನುನ ಬೆಲೆ} = ₹ \frac{22}{5}$$

ಈ ಪೆನ್ನುನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬಲ್ಲವಾ? ಈ ಪೆನ್ನುನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆಯಾ? ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸಿಮ್ಲಾದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ನಮೋದಾದ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳ ವಿವರಗಳು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.



ಸಮಯ	ಬೆ.10.00 ಗಂ.	ಮ.12.00 ಗಂ.	ಮ.3.00ಗಂ.	ರಾ.7.00 ಗಂ.	ರಾ.10.00 ಗಂ.
ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆ	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೂ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದಾರಾ!

ಸಂದರ್ಭ I ಬೆಳಗಿನ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಂಟೆಗೆ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ  $\frac{14^{\circ}\text{C} - 12^{\circ}\text{C}}{2} = \frac{3^{\circ}}{2}$  ಸೆಂ.ಗ್ರೇ/ಗಂ  
(ಬೆ.10.00 - ಮ.12.00 ಗಂ)

ಸಂದರ್ಭ II ಮಧ್ಯಾಹ್ನ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಂಟೆಗೆ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ  $\frac{17^{\circ}\text{C} - 14^{\circ}\text{C}}{3} = 1^{\circ}$  ಸೆಂ.ಗ್ರೇ/ಗಂ  
(ಮ 12.00 - ಮ 3.00 ಗಂ)

ಸಂದರ್ಭ III ಸಾಯಂಕಾಲ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಂಟೆಗೆ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ  $\frac{10^{\circ}\text{C} - 17^{\circ}\text{C}}{4} = \frac{-7^{\circ}}{4}$  ಸೆಂ.ಗ್ರೇ/ಗಂ  
(ಮ 3.00 - ಮ 7.00 )

ಸಂದರ್ಭ IV ರಾತ್ರಿ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಂಟೆಗೆ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ  $\frac{5^{\circ}\text{C} - 10^{\circ}\text{C}}{3} = \frac{-5^{\circ}}{3}$  ಸೆಂ.ಗ್ರೇ/ಗಂ  
(ರಾ.7.00 - ರಾ. 10.00 ಗಂ)

ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ  $\frac{3}{2}^{\circ}\text{C}$ ,  $1^{\circ}\text{C}$ ,  $\frac{-7}{4}^{\circ}\text{C}$ ,  $\frac{-5}{3}^{\circ}\text{C}$  ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುವರು? ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನಮಗೆ ವಿವಿಧ ನಮೂನೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಈಗ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.  $\frac{3}{2}^{\circ}\text{C}$ ,  $1^{\circ}\text{C}$ ,  $\frac{-7}{3}^{\circ}\text{C}$ ,  $\frac{-5}{3}^{\circ}\text{C}$ .

$\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{9}$ ,  $\frac{-10}{17}$ ,  $\frac{3}{-2}$ ,  $\frac{2013}{2014}$ , ..... ಗಳಂತಹ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$p$ ,  $q$  ಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,  $q \neq 0$  ಆದರೆ  $\frac{p}{q}$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'Q' ಎಂಬ ಅಂಗ್ಲ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

5 ಎಂಬ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು  $\frac{5}{1}$  ಅಥವಾ  $\frac{10}{2}$  ..... ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾದರೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 0 ನ್ನು  $\frac{0}{1}$  ಅಥವಾ  $\frac{0}{2}$ , ..... ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

-3 ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಂಕವನ್ನು  $\frac{-3}{1}$  ಅಥವಾ  $\frac{-6}{2}$ , ..... ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.



### ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

$1, \frac{1}{2}, -2, 0.5, 4\frac{1}{2}, \frac{-33}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0.\bar{3}, 22, -5, \frac{2}{19}, 0.125.$

- (i) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು \_\_\_\_\_
- (ii) ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು \_\_\_\_\_
- (iii) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು \_\_\_\_\_
- (iv) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು \_\_\_\_\_

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಣದಲ್ಲಿ ಬಾರದೇ ಉಳಿದಿದೆಯಾ? ಒಂದು ವೇಳೆ ಉಳಿದರೆ ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ, ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ?



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಹಮೀದ್  $\frac{5}{3}$  ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು, 5 ಕೇವಲ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರವೇ ಅಗುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಿದನು. ಸಾಕ್ಷಿ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಿದಳು. ಇವರಿಬ್ಬರ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿನೀವು ಯಾರೊಂದಿಗೆ ಸಹಮತಿಸುತ್ತೀರಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ತ್ರಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.
  - (i) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಗುತ್ತವೆ ಆದರೆ ಇದರ ಪ್ರತಿಕ್ರಮ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.
  - (ii) ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.
  - (iii) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಆಲ್ಲ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

**1.2 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು**

**1.2.1 ಆವೃತ ಗುಣ :**

**(i) ಆವೃತ ಗುಣ ಎಂದರೇನು?**

ಎರಡು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಹ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಸಂಕಲದಲ್ಲಿ ಆವೃತಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಥವಾ ಸಂಕಲನವು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

**ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು :** ನಾವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಾರಿ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸರಿಯಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯಾಗುಣ	ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳು			
	ಸಂಕಲನ	ವ್ಯವಕಲನ	ಗುಣಾಕಾರ	ಭಾಗಾಕಾರ
ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಆವೃತಗುಣ ಏಕೆಂದರೆ a, b ಗಳ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ a + b ಸಹ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಉದಾ : - -	ಆವೃತಗುಣವಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ 5-7 = -2 ಇಲ್ಲಿ -2 ಇಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಲ್ಲ	ಆವೃತಗುಣ ಏಕೆಂದರೆ - - -	ಆವೃತಗುಣವಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ 5 ÷ 8 = $\frac{5}{8}$ ಇದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಲ್ಲ
ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು	- - -	ಆವೃತಗುಣ ಏಕೆಂದರೆ a, b ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ a-b ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗುತ್ತದೆ	- - -	ಆವೃತಗುಣವಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ - - -

## (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು - ಆವೃತಗುಣ

(a) ಸಂಕಲನ: ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$$

ಇಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶವು  $\frac{51}{56}$  ಸಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ.

$$8 + \left(\frac{-19}{2}\right) = \text{_____} \text{ ಮೊತ್ತವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ?}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} = \text{___} \text{ನಿನಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ}$$

ಬಂದಿದೆಯಾ?

ಇದೇ ರೀತಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

$$3 + \frac{5}{7}, \quad 0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2} + \frac{2}{7}$$

ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಅಗುವುದೆಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಆವೃತಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $a, b$ , ಗಳಿಗೆ  $a+b$  ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಗುವುದು. i.e.,  $\forall a, b \in \mathbb{Q}; (a+b) \in \mathbb{Q}$ .

## (b) ವ್ಯವಕಲನ:

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{5}{9}$  ಮತ್ತು  $\frac{3}{4}$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\text{ಈಗ } \frac{5}{9} - \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4 - 3 \times 9}{36} = \frac{20 - 27}{36} = \frac{-7}{36}$$

ಇಲ್ಲಿ  $\frac{-7}{36}$  ಎಂಬುದು ಪುನಃ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ (ಏಕೆಂದರೆ  $-7, 36$  ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು  $36, 0$  ಗೆಸಮಾನವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ  $\frac{-7}{36}$  ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.)

ಈ ಗುಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸರಿ ನೋಡೋಣ.

$$(i) \quad \frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} = \text{_____} \text{ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ?}$$

$$(ii) \quad \left(\frac{48}{9}\right) - \frac{11}{18} = \text{_____} \text{ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ?}$$

ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಅಗುವುದೆಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $a, b$  ಗಳಿಗೆ  $a-b$  ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಗುವುದು. i.e.,  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, (a-b) \in \mathbb{Q}$ 

## ∈ ಸೇರಿದೆ ∇ ಎಲ್ಲಾವೂ

ಗಣ  $A = \{1, 2, 3\}$  ಎಂದುಕೊಂಡರೆ3, A ನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶ ಇದನ್ನು  $3 \in A$  ಎಂದು ಬರೆದು 3, A ಗೆ ಸೇರುತ್ತದೆ ಇಲ್ಲವೇ 3, A ನ ಗಣಾಂಶ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.∇ ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರತಿ ಅಥವಾ ಎಲ್ಲಾ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಗುರುತು  $\forall a, b \in \mathbb{Q}$  ಅಂದರೆ Q ಗೆ ಸೇರಿದ ಪ್ರತಿ  $a, b$  ಗಣಾಂಶಗಳಿಗೆ ಎಂದು ಅರ್ಥ.



## (c) ಗುಣಾಕಾರ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \frac{2}{1} \times \frac{19}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಪುನಃ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ನಿಮಗೆ ಇಷ್ಟವಾದ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಸರಿ ನೋಡಿರಿ. ಗುಣಲಬ್ಧವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ?

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಆವೃತಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವವೆಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $a, b$  ಗಳಿಗೆ  $a \times b$  ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದು.

. i.e.,  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \times b \in \mathbb{Q}$

## (d) ಭಾಗಾಕಾರ

ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{2}{3}$  ಮತ್ತು  $\frac{7}{8}$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$$
 ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇನಾ?

ಮತ್ತೆರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$$

$$-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಪುನಃ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಲಭಿಸುತ್ತದೆಂದು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಆದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೆಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದೇ 0, 5 ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು

$5 \div 0 = \frac{5}{0}$  ನ್ನು ನಿರ್ವಚಿಸಲಾಗದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೊನ್ನೆ ಹೊರತಾಗಿ ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ  $\mathbb{Q}$  ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಆವೃತಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$\frac{5}{0}$  ನ್ನು ಏಕೆ ನಿರ್ವಚಿಸಲಾರೆವು

$5 \div 0$  ಅಂದರೆ  $0) 5$  (?)

ಈ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡೋವೆಯಾ? ಆದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು? ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ '0' ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧ '0' ಯೇ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ '0' ಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಅಸಾಧ್ಯ.



### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ:

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಹೊರತಾಗಿಸಿದರೆ ಅದು ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅವೃತ್ತಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೇ ?

ಇದೇ ರೀತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅವೃತ್ತ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೇ ?



### ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಅವೃತ್ತಗುಣ			
	ಸಂಕಲನ	ವ್ಯವಕಲನ	ಗುಣಾಕಾರ	ಭಾಗಾಕಾರ
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಹೌದು	—	—	—
ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	—	—	—	ಆಲ್ಲ
ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು	—	ಹೌದು	—	—
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	—	—	ಹೌದು	—

### 1.2.2. ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ :

ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಯಾವ ಯಾವ ಮೂಲಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವವೋ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಫಲಿತಾಂಶವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮದ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಡಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಕ್ರಿಯೆ ಎನ್ನುವರು, ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ

$$a + b = b + a$$

ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ  $a \times b = b \times a$

i.e., +, -, ×, ÷

### (i) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು :

ಮೂಲಕ್ರಮಗಳು	ಉದಾಹರಣೆಗಳು	ವಾಖ್ಯೆ
ಸಂಕಲನ	2, 3 ಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2+3 = 5$ ಮತ್ತು $3 + 2 = 5$ $\therefore 2 + 3 = 3 + 2$	ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ
ವ್ಯವಕಲನ	$3 - 2$ ಮತ್ತು $2 - 3$ ಗಳು ಸಮಾನವೇ?	ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ
ಗುಣಾಕಾರ	-----	-----
ಭಾಗಾಕಾರ	$4 \div 2 = ?$ $2 \div 4 = ?$ Is $4 \div 2 = 2 \div 4$ ?	-----

## (ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳು	ಉದಾಹರಣೆಗಳು	ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
ಸಂಕಲನ	---	ಸಂಕಲನವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ
ವ್ಯವಕಲನ	2, 3 ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $2 - (3) = ?$ $(3) - 2 = ?$ $2 - (3)$ ಮತ್ತು $(3) - 2 =$ ಸಮಾನವೇ?	.....
ಗುಣಾಕಾರ	.... .	.... .
ಭಾಗಾಕಾರ	.... .	ಭಾಗಾಕಾರವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ

## (iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

## (a) ಸಂಕಲನ

ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{-3}{4}$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{5}{2} + \frac{(-3)}{4} = \frac{2 \times 5 + 1 \times (-3)}{4} = \frac{10 - 3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{(-3)}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1 \times (-3) + 2 \times 5}{4} = \frac{-3 + 10}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } \frac{5}{2} + \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{5}{2}$$

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{7} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \quad \text{ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \quad ?$$

$$\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right) = \left(\frac{-4}{5}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right) \quad \text{ಗಳು ಸಮಾನವೇ ?}$$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನುಕ್ರಮವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತವು ಸಹ ಬದಲಾಗುವಂತೆ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ ಬಲ್ಲೆಯಾ? a, b, ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ  $a + b = b + a$  ಆಗುವುದೆಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಕಲನ ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$$\therefore \forall a, b \in \mathbb{Q}, a + b = b + a$$

(b) ವ್ಯವಕಲನ : ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{2}{3}$  ಮತ್ತು  $\frac{7}{8}$  ನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } \frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$$

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

$$2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2 \quad \text{ಗಳು ಸಮಾನವೇ?}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \quad \text{ಅಗುತ್ತದೆಯಾ?}$$

ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

a, b ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ  $a - b \neq b - a$

(c) ಗುಣಾಕಾರ : ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $2, -\frac{5}{7}$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7} ; \quad \frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7} \quad \text{ಆದ್ದರಿಂದ } 2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$$

$$\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right) \quad \text{ಅಗುವುದೇ?}$$

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಸರಿನೋಡಿರಿ. ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಅಂದರೆ a, b ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ  $a \times b = b \times a$  ಆಗುವುದು.

i.e.  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \times b = b \times a$

(d) ಭಾಗಾಕಾರ :

$$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{14}{9} \div \frac{7}{3} \quad \text{ಗಳು ಸಮಾನವೇ?}$$

$$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{7}{3} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{2} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{14}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$$

ಇದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

ಕೆಳಗಿನವು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಅವೃತ್ತಗುಣ			
	ಸಂಕಲನ	ವ್ಯವಕಲನ	ಗುಣಾಕಾರ	ಭಾಗಾಕಾರ
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಹೌದು	ಅಲ್ಲ	ಹೌದು	_____
ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	_____	_____	_____	ಅಲ್ಲ
ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು	_____	_____	_____	_____
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	_____	_____	_____	ಅಲ್ಲ

**1.2.3 ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ :**

ನಾವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಸಂಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ



ಸಂಕಲನ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವೆಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡುವಾಗ, ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೂ, ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೊನೆಯ ಎರಡಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೂ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಂದೇ.  
 $(3 + 2) + 5 = 3 + (2 + 5)$ .

**(i) ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು :**

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಮೂಲಕ್ರಮಗಳು	ಉದಾಹರಣೆಗಳು	ವಾಖ್ಯೆ
ಸಂಕಲನ	$Is\ 2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0 ?$ $2 + (3 + 0) = 2 + 3 = 5$ $(2 + 3) + 0 = 5 + 0 = 5$ $\Rightarrow 2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0$ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, b, c, ಗಳಿಗೆ $a + (b + c) = (a + b) + c$	_____
ವ್ಯವಕಲನ	$(2-3) - 2 = ?$ $2-(3-2) = ?$ $Is\ (2-3) - 2 = 2-(3-2) ?$	ವ್ಯವಕಲನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ
ಗುಣಾಕಾರ	_____	ಗುಣಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗುವುದು.
ಭಾಗಾಕಾರ	$Is\ 2 \div (3 \div 5) = (2 \div 3) \div 5 ?$ $2 \div (3 \div 5) = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ $(2 \div 3) \div 5 = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ $2 \div (3 \div 5) \neq (2 \div 3) \div 5$	ಭಾಗಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ

## (ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

ನಾಲ್ಕು ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸರಿಯಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳು	ಉದಾಹರಣೆಗಳು	ವಾಖ್ಯೆ
ಸಂಕಲನ	$2 + [(-3) + 5] = [(2 + (-3)) + 5]$ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ? $2 + [(-3) + 5] = 2 + [-3 + 5] = 2 + 2 = 4$ $[2 + (-3)] + 5 = [2 - 3] + 5 = -1 + 5 = 4$ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, b, c ಗಳಿಗೆ $a + (b + c) = (a + b) + c$	-----
ವ್ಯವಕಲನ	$6 - (9 - 5) = (6 - 9) - 5$ ಆಗುವುದೇ ?	-----
ಗುಣಾಕಾರ	$2 \times [7 \times (-3)] = (2 \times 7) \times (-3)$ ಆಗುವುದೇನೋ ತಾಳೆನೋಡಿರಿ?	-----
ಭಾಗಾಕಾರ	$10 \div [2 \div (-5)] = [10 \div 2] \div (-5)$ ? $10 \div [2 \div (-5)] = 10 \div \frac{-2}{5} = 10 \times \frac{-5}{2} = -25$ ಇದೇ ರೀತಿ $(10 \div 2) \div (-5) = \frac{10}{2} \div 5 = 5 \div 5 = \frac{5}{5} = 1$ ಅದ್ದರಿಂದ $10 \div [2 \div (-5)] \neq [10 \div 2] \div (-5)$	-----

## (iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು - ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ

## (a) ಸಂಕಲನ

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{2}{7}$ , 5,  $\frac{1}{2}$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{2}{7} + \left[ 5 + \left( \frac{1}{2} \right) \right] = \left[ \left( \frac{2}{7} + 5 \right) \right] + \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{7} + \left[ 5 + \left( \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{2}{7} + \left[ 5 + \frac{1}{2} \right] = \frac{2}{7} + \left[ \frac{10+1}{2} \right] = \frac{4+77}{14} = \frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.} = \left[ \left( \frac{2}{7} + 5 \right) \right] + \left( \frac{1}{2} \right) = \left[ \left( \frac{2+35}{7} \right) \right] + \frac{1}{2} = \frac{37}{7} + \frac{1}{2} = \frac{74+7}{14} = \frac{81}{14}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

$$\frac{1}{2} + \left[ \frac{3}{7} + \left( \frac{4}{3} \right) \right] \text{ ಮತ್ತು } \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \right] + \left( \frac{4}{3} \right) \text{ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.}$$

ಈ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವೇ?

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವವು ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, b, ಮತ್ತು cಗಳಿಗೆ

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{i.e., } \forall a, b, c \in \mathbb{Q}, \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

(b) ವ್ಯವಕಲನ

$\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  ಮತ್ತು  $\frac{-5}{4}$  ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$$\frac{1}{2} - \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{-5}{4} \right) \right] = \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right] - \left( \frac{-5}{4} \right) \text{ ಗಳು ಸಮಾನವೇ?}$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{2} - \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{-5}{4} \right) \right] = \frac{1}{2} - \left[ \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \right] = \frac{1}{2} - \left[ \frac{8}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S.} = \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{-5}{4} \right) = \left( \frac{1 \times 2 - 3}{4} \right) + \frac{5}{4} = \left( \frac{-1}{4} \right) + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} - \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{-5}{4} \right) \right] \neq \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{-5}{4} \right)$$

$$\text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, b, c ಗಳಿಗೆ  $a - (b - c) \neq (a - b) - c$

(c) ಗುಣಕಾರ

ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{-5}{7}$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{2}{3} \times \left[ \frac{4}{7} \times \left( \frac{-5}{7} \right) \right] = \left( \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \right) \times \left( \frac{-5}{7} \right) \text{ ಅಗುವುದೇ?}$$

$$\text{LHS} = \frac{2}{3} \times \left[ \frac{4}{7} \times \left( \frac{-5}{7} \right) \right] = \frac{2}{3} \left[ \frac{-20}{49} \right] = \frac{-40}{147}$$

$$\text{RHS} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right) \text{ ಮತ್ತು } \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3 \text{ ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ}$$

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3 \text{ ಅಗುವುದೇ?}$$

$$\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) \text{ ಮತ್ತು } \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5} \text{ ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ}$$

$$\text{Is } \frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5} \text{ ಅಗುವುದೇ?}$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ L.H.S = R.H.S ಅಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಅಗುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, b ಮತ್ತು c ಗಳಿಗೆ

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

$$\text{i.e., } \forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

(d) ಭಾಗಾಕಾರ:

ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$  ಮತ್ತು  $\frac{1}{7}$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7} ? \text{ ಅಗುವುದೇ?}$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3} \div \frac{21}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{8}{63}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right) \div \frac{1}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{1} = \frac{56}{9}$$

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$$

$$\text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ a, b, c ಗಳು ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ  $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.





### ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯಗುಣ			
	ಸಂಕಲನ	ವ್ಯವಕಲನ	ಗುಣಾಕಾರ	ಭಾಗಾಕಾರ
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಹೌದು	ಅಲ್ಲ	.....	.....
ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	.....	.....	.....	ಅಲ್ಲ
ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು	.....	ಅಲ್ಲ	ಹೌದು	.....
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	.....	.....	.....	.....

### 1.2.4 ಸೊನ್ನೆಯ ಪಾತ್ರ

$\frac{1}{2}$  ಕ್ಕೆ ಏನನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಫಲಿತಾಂಶ  $\frac{1}{2}$  ಬರುತ್ತದೋ ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ?

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ '0' ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$1 + 0 = 1 \text{ ಮತ್ತು } 0 + 1 = 1$$

$$-2 + 0 = -2 \text{ ಮತ್ತು } 0 + (-2) = -2$$

$$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \text{ ಮತ್ತು } 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ '0' ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ '0' ನ್ನು ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು.

'a' ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ  $a + 0 = a$  ಮತ್ತು  $0 + a = a$

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯಾ ?

### 1.2.5 '1' ರ ಪಾತ್ರ

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಖಾಲಿ ಜೊಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ:

$$3 \times \square = 3 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \square \times 3 = 3$$

$$-2 \times \square = -2 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \square \times -2 = -2$$

$$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$$

ಮೇಲಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ನೀನು ಏನನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದೆ ?

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು '1' ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ '1' ಬರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುವೆಯಾ?

ಇಲ್ಲಿ '1' ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಆನನ್ಯತಾಂಶ ಎಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಆನನ್ಯತಾಂಶ ಯಾವುದು ?

ಗುಣಾಕಾರದ ಆನನ್ಯತಾಂಶ ಗುಣವನ್ನು ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದೆಯೇ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

$\frac{15}{50}$  ನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

$$\frac{15}{50} = \frac{3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$$

$\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$  ಎಂದು ಬರೆಯುವಾಗ ನಾವು ಗುಣಾಕಾರದ ಆನನ್ಯತಾಂಶ ಗುಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

### 1.2.6 ವಿಲೋಮದ ಅಸ್ತಿತ್ವ

(i) ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ :

$$3 + (-3) = 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad -3 + 3 = 0$$

$$-5 + 5 = 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad 5 + (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{3} + ? = 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \underline{\hspace{2cm}} + \frac{2}{3} = \underline{\hspace{2cm}}?$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad ? + \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{0}$$

3 ಮತ್ತು (-3) ರ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆ ಆದ್ದರಿಂದ 3 ಮತ್ತು (-3) ಗಳನ್ನು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮಗಳು ಎಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆ ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಮಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ 'a' ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ

$a + (-a) = 0$  ಮತ್ತು  $(-a) + a = 0$  ಆದರೆ  $a, -a$  ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮಗಳು.

ಸೊನ್ನೆಯ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ ಎಷ್ಟು?

$0 + 0 = 0$ , ಆದ್ದರಿಂದ '0' ಯ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ 0.

(ii) ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ:

ಗುಣಲಬ್ಧ 1 ಆಗಲು  $\frac{2}{7}$  ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಬಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

$$\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = 1 \quad \text{ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.}$$

ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

$$2 \times \square = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \square \times 2 = 1$$

$$-5 \times \square = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \square \times 5 = 1$$

$$\frac{-17}{19} \times \square = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \square \times \frac{-17}{19} = 1$$

$$1 \times ? = 1$$

$$-1 \times ? = 1$$

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ '1' ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ  $4 \times \frac{1}{4} = 1$  ಮತ್ತು  $\frac{1}{4} \times 4 = 1$ , ಆದ್ದರಿಂದ 4 ಮತ್ತು  $\frac{1}{4}$  ಗಳ ಎರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮಗಳು ಅಥವಾ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ  $\frac{c}{d}$  ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ  $\frac{a}{b}$  ಗೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮವಾದರೆ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = 1$$

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :**



1. ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪಾಲಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಯೇ? ಯಾವುವು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ? ಯಾವುವು ಇಲ್ಲ?
2. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮಗಳು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ? ತನ್ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ತಾನೇ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮಗಳಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?
3. ಸೊನ್ನೆ (0) ಯ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆಯಾ? '0' ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ '1' ಬರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆಯೇ?

$$\square \times 0 = 1 \quad \text{ಇಲ್ಲವೇ} \quad 0 \times \square = 1$$

### 1.3 ವಿಭಾಜಕ ಅಥವಾ ವಿತರಣಾ ನಿಯಮ ( ಸಂಕಲನದೊಂದಿಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿತರಣಾ ನಿಯಮ)

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{2}{5} \times \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) = \left( \frac{2}{5} \right) \times \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{2}{5} \right) \times \left( \frac{3}{4} \right) \quad \text{ಆಗುತ್ತದೆಯೇ? ನೋಡೋಣ.}$$

$$\text{L.H.S} = \frac{2}{5} \times \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{5} \times \left( \frac{2+3}{4} \right) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{2}{5} \times \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{5} \times \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{20} = \frac{4+6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

ಆದ್ದರಿಂದ 
$$\frac{2}{5} \times \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) = \left( \frac{2}{5} \right) \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{2}{5} \right) \left( \frac{3}{4} \right)$$

ಈ ಗುಣವನ್ನು ಸಂಕಲನದ ಮೇಲೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ ಎನ್ನುವರು.

$$\frac{2}{5} \times \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{5} \times \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{5} \times \left( \frac{3}{4} \right) \text{ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ?}$$

LHS = RHS? ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

ಈ ಗುಣವನ್ನು ವ್ಯವಕಲನದ ಮೇಲೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ ಎನ್ನುವರು.

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಬಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, b, c ಗಳಿಗೆ

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab - ac \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.}$$

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ : ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(1) \left\{ \frac{7}{5} \times \left( \frac{-3}{10} \right) \right\} + \left\{ \frac{7}{5} \times \frac{9}{10} \right\}$$

$$(2) \left\{ \frac{9}{16} \times 3 \right\} + \left\{ \frac{9}{16} \times -19 \right\}$$



ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಸಂಕಲನದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು				
	ಆವೃತ	ಪರಿವರ್ತನೀಯ	ಸಹವರ್ತನೀಯ	ಅನನ್ಯತಾಂಶ	ವಿಲೋಮ
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಹೌದು	---	---	---	---
ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ	ಹೌದು	---	---	---	---
ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	---	---	---	ಹೌದು	ಇಲ್ಲ
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಹೌದು	---	---	---	---

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ					
ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಸಂಕಲನದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು				
	ಆವೃತ	ಪರಿವರ್ತನೀಯ	ಸಹವರ್ತನೀಯ	ಅನನ್ಯತಾಂಶ	ವಿಲೋಮ
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಹೌದು	—	—	—	—
ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ	—	ಹೌದು	—	—	—
ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	—	—	ಹೌದು	—	—
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	—	—	—	ಹೌದು	—

**ಉದಾಹರಣೆ 1.**  $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{5}\right) + \left(\frac{-13}{7}\right)$  ನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಜಾತಿಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿ.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{5}\right) + \left(\frac{-13}{7}\right) &= \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{6}{5} - \frac{13}{7} \\ &= \left(\frac{2}{5} - \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{3}{7} - \frac{13}{7}\right) \quad (\text{ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ}) \\ &= \frac{2-6}{5} + \frac{3-13}{7} \\ &= \frac{-4}{5} + \frac{-10}{7} = \frac{-4}{5} - \frac{10}{7} \\ &= \frac{-4 \times 7 - 10 \times 5}{35} = \frac{-28 - 50}{35} = \frac{-78}{35} \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i)  $\frac{2}{7}$       (ii)  $\frac{-11}{5}$       (iii)  $\frac{7}{-13}$       (iv)  $\frac{-2}{-3}$

**ಪರಿಹಾರ :** (i)  $\frac{2}{7}$  ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ  $\frac{-2}{7}$

ಏಕೆಂದರೆ  $\frac{2}{7} + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{2-2}{7} = 0$

$$(ii) \quad \frac{-11}{5} \text{ ರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ} - \left( \frac{-11}{5} \right) = \frac{11}{5}$$

$$(iii) \quad \frac{7}{-13} \text{ ರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ} - \left( \frac{7}{-13} \right) = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$$

$$(iv) \quad \frac{-2}{-3} \text{ ರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ} - \left( \frac{+2}{+3} \right) = -\frac{2}{3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3 :  $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$  ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

$$\text{ಪರಿಹಾರ : } \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$$

( ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ನಿಯಮ)

$$= \frac{2}{5} \times \left( \frac{-1}{9} \right) + \left( \frac{-1}{9} \right) \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$$

$$= \frac{-1}{9} \left( \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right) + \frac{23}{180} \text{ (ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ)}$$

$$= -\frac{1}{9} \left( \frac{8+15}{20} \right) + \frac{23}{180}$$

$$= -\frac{1}{9} \left( \frac{23}{20} \right) + \frac{23}{180} = \frac{-23}{180} + \frac{23}{180} = 0 \text{ ( ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ ನಿಯಮ)}$$

ಉದಾಹರಣೆ 4:  $\frac{-9}{2}$  ಮತ್ತು  $\frac{5}{18}$  ಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ  $\left( \frac{-4}{5} \right)$  ರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶ ಎಷ್ಟು?

$$\text{ಪರಿಹಾರ : } \frac{-9}{2} \text{ ರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವು } \frac{-2}{9}$$

$$\frac{5}{18} \text{ ರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವು } \frac{18}{5}$$

$$\text{ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ} = \frac{-2}{9} \times \frac{18}{5} = \frac{-4}{5}$$

$$\left(\frac{-4}{5}\right) \text{ರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ} \frac{4}{5}$$

$$\text{ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ} + \text{ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ} = \frac{-4}{5} + \frac{4}{5} = 0 \text{ (ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ ಗುಣ)}$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 1.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$(i) \quad \frac{8}{5} + 0 = \frac{8}{5} = 0 + \frac{8}{5}$$

$$(ii) \quad 2 \left( \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \frac{3}{5} \right) + 2 \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$(iii) \quad \frac{3}{7} \times 1 = \frac{3}{7} = 1 \times \frac{3}{7}$$

$$(iv) \quad \left( \frac{-2}{5} \right) \times 1 = \frac{-2}{5} = 1 \times \left( \frac{-2}{5} \right)$$

$$(v) \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

$$(vi) \quad \frac{5}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$$

$$(vii) \quad 7a + (-7a) = 0$$

$$(viii) \quad x \times \frac{1}{x} = 1 \quad (x \neq 0)$$

$$(ix) \quad (2 \times x) + (2 \times 6) = 2 \times (x + 6)$$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$$(i) \quad \frac{-3}{5}$$

$$(ii) \quad 1$$

$$(iii) \quad 0$$

$$(iv) \quad \frac{7}{9}$$

$$(v) \quad -1$$

3. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಟ್ಟಿಡುಕುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

$$(i) \quad \left( \frac{-1}{17} \right) + (\text{---}) = \left( \frac{-12}{5} \right) + \left( \frac{-1}{17} \right)$$

$$(ii) \quad \frac{-2}{3} + \text{---} = \frac{2}{3}$$

$$(iii) \quad 1 \times \text{---} = \frac{9}{11}$$

$$(iv) \quad -12 + \left( \frac{5}{6} + \frac{6}{7} \right) = \left( -12 + \frac{5}{6} \right) + (\text{---})$$

$$(v) \quad (\text{---}) \times \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \left( \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{4} \times \text{---} \right)$$

$$(vi) \quad \frac{-16}{7} + \text{---} = \frac{-16}{7}$$

4.  $\frac{2}{11}$  ನ್ನು  $\frac{-5}{14}$  ರ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

5.  $\frac{2}{5} \times \left(5 \times \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{3} \times \left(3 \times \frac{4}{11}\right)$  ರ ಗಣನೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಯಾವ ಗುಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ?

6. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$\left(\frac{5}{4} + \frac{-1}{2}\right) + \frac{-3}{2} = \frac{5}{4} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2}\right)$$

7.  $\frac{3}{5} + \frac{7}{3} + \left(\frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right)$  ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪುನಃರಚನೆಯ ನಂತರ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ

8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಿರಿ.

(i)  $\frac{1}{3}$  ರಿಂದ  $\frac{3}{4}$     (ii) 2 ರಿಂದ  $\frac{-32}{13}$     (iii)  $\frac{-4}{7}$  ರಿಂದ -7

9.  $\frac{-5}{8}$  ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಸೇರಿಸಿದಾಗ  $\frac{-3}{2}$  ಬರುತ್ತದೆ.

10. ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ  $\frac{-5}{6}$  ಆದರೆ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

11. ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಯೇ? ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿರಿ

12.  $-(-x) = x$  ನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿಸೋಡಿರಿ.

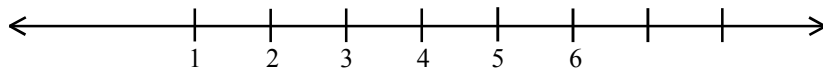
(i)  $x = \frac{2}{15}$     (ii)  $x = \frac{-13}{17}$

13. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ನೀಡಿರಿ.

- ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ ಹೊಂದಿರದ ಗಣ ಯಾವುದು ?
- ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ ವಿಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?
- ಋಣ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ.

#### 1.4 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸುವುದು.

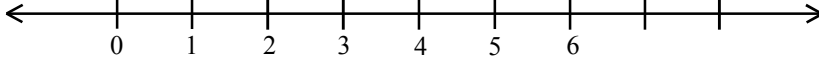
ಗಾಯತ್ರಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಬರೆದು ಅದರ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ್ದಾಳೆ.



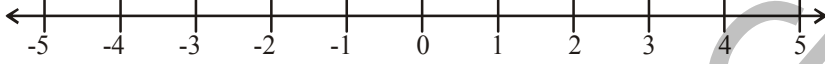
ಗಾಯತ್ರಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾಳೆ.



ಸುಜಾತ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೇಳಿದಳು. ಪರಮೇಶ್ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೇಳಿದನು. ಯಾರ ವಾದದೊಂದಿಗೆ ನೀವು ಸಹಮತಿಸುತ್ತೀರಿ?



ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು? ಅವು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ? ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ?



ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?

ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ -5, 3 ನಡುವೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳವೆಯೇ?

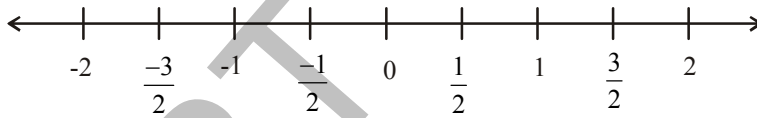
ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 0, 1 ಇಲ್ಲವೆ -1, 0 ರ ಮಧ್ಯೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳವೆಯೇ?

0,1 ರ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ  $\frac{1}{2}$ ,

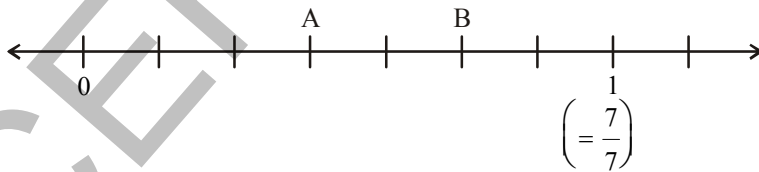
1 ಮತ್ತು 2ರ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ  $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ , 0 ಮತ್ತು -1 ರ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ  $-\frac{1}{2}$ ,

-1 ಮತ್ತು -2 ರ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ  $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  ಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



**ಉದಾಹರಣೆ 5:** ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ A, B ಗಳು ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ?



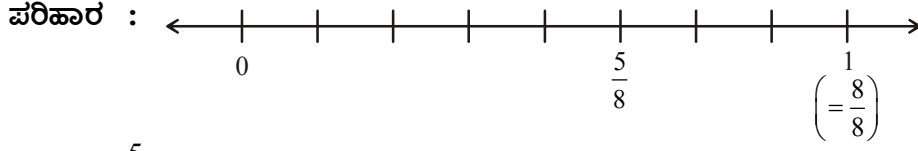
**ಪರಿಹಾರ :**

ಇಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ 1ರ ವರೆಗಿನ ಯೂನಿಟನ್ನು 7 ಸಮಾನ ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸೋಣ. A ಎಂಬುದು 7 ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ 3ನೇ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ಎಂಬುದು  $\frac{3}{7}$  ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ B ಎಂಬುದು  $\frac{5}{7}$  ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಭೇದವೆಂಬುದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿ ಯೂನಿಟನ್ನು ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಶವು ಆ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಷಯವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 6:**  $\frac{5}{8}$  ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

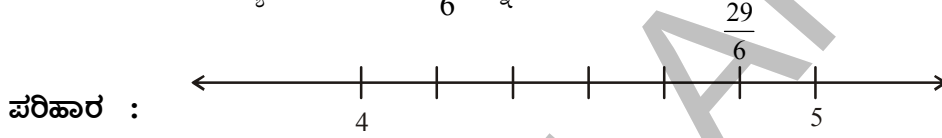


$\frac{5}{8}$  ಎಂಬುದು ಸಮಭಿನ್ನರಾಶಿ. ಇದರ ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಮಧ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಛೇದ 8 ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಮಧ್ಯೆ ದೂರವನ್ನು 8 ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.

0 ಯಿಂದ 5ನೇ ಭಾಗವನ್ನು (ಅಂಶ) ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ  $\frac{5}{8}$  ಅಗುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ  $\frac{29}{6}$  ನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರಿ.



$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$ ,  $\frac{29}{6}$  ಎಂಬುದು 4 ಮತ್ತು 5 ರ ಮಧ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.

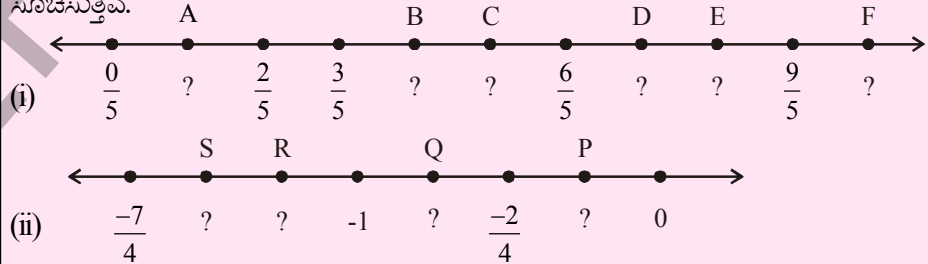
4 ಮತ್ತು 5 ರ ಮಧ್ಯೆ ಯಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು 6 (ಛೇದ) ನಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸೋಣ.

4 ರಿಂದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 5ನೇ ಭಾಗವನ್ನು  $4\frac{5}{6} = \frac{29}{6}$  ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಆಂಗ್ಲ ಅಕ್ಷರಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.



**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ**

(i)  $-\frac{13}{5}$  ನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

### 1.5 ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

1 ಮತ್ತು 5 ರ ಮಧ್ಯೆಯಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4, 3, 2.

1 ಮತ್ತು 2 ರ ಮಧ್ಯೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೇ? -4 ಮತ್ತು 3 ರ ಮಧ್ಯೆಯಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು -3, -2, -1, 0, 1, 2.

ನೀನು -2 ಮತ್ತು -1 ರ ಮಧ್ಯೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವೇ? ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾರೆವು.

ಆದರೆ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವು?

ಈಗ ನಾವು 2 ಮತ್ತು 3 ರ ನಡುವೆ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

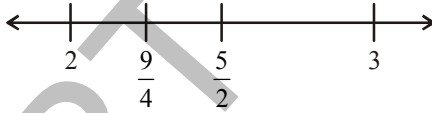
a, b ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ  $\frac{a+b}{2}$  ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ a, b ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎನ್ನುವರು.

ಆದ್ದರಿಂದ 2 ಮತ್ತು 3 ರ ಮಧ್ಯೆಯಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.  $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$  ಇದು 2, 3 ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

ಆದ್ದರಿಂದ  $2 < \frac{5}{2} < 3$ .

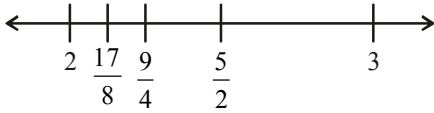


ಈಗ 2 ಮತ್ತು  $\frac{5}{2}$  ರ ನಡುವೆಯಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ =  $\frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ .



$2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$

ಆದೇ ರೀತಿ  $2, \frac{9}{4}$  ರ ಸರಾಸರಿ =  $\frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{17}{4} = \frac{17}{8}$



ಆದ್ದರಿಂದ  $2 < \frac{17}{8} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$

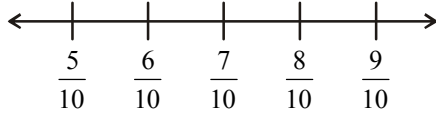
ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಬೇಕಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾ ಹೋಗಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಇದರಿಂದ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

## ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿ

ಸರಾಸರಿ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ  $\frac{5}{10}$  ಮತ್ತು  $\frac{9}{10}$  ರ ಮಧ್ಯೆ 100 ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲವೇ?

ಇಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಸುದೀರ್ಘ ಪದ್ಧತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.  
ಆದ್ದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಪದ್ಧತಿಯ ಕುರಿತು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ

$$\frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10} \text{ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು}$$

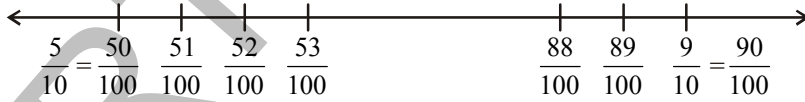


ಇಲ್ಲಿ ನಾವು 3 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಬರೆಯಬಹುದು.  $\frac{5}{10}$  ಮತ್ತು  $\frac{9}{10}$ .

$$\text{ಆದರೆ } \frac{5}{10} = \frac{50}{100} \text{ ಮತ್ತು } \frac{9}{10} = \frac{90}{100}$$

ಈಗ  $\frac{50}{100}$  ಮತ್ತು  $\frac{90}{100}$  ರ ನಡುವಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

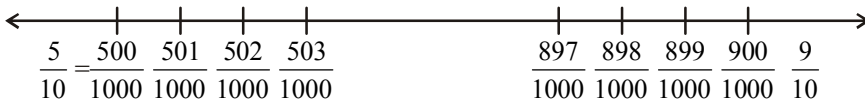
$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} < \frac{51}{100} < \frac{52}{100} < \frac{53}{100} < \dots < \frac{89}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$



ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ  $\frac{5}{10}$ ,  $\frac{9}{10}$  ರ ನಡುವೆ ನಾವು 39 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$$\text{ಅದೇ ರೀತಿ } \frac{5}{10} = \frac{500}{1000} \text{ ಮತ್ತು } \frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } \frac{5}{10} = \frac{500}{1000} < \frac{501}{1000} < \frac{502}{1000} < \frac{503}{1000} < \dots < \frac{899}{1000} < \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$$



ಈ ವಿಧವಾಗಿ ನಾವು ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ-8:  $-3$  ಮತ್ತು  $0$  ಯ ನಡುವಿನ  $5$  ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :  $-3 = -\frac{30}{10}$  ಮತ್ತು  $0 = \frac{0}{10}$  ಆದ್ದರಿಂದ

$-\frac{29}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{27}{10}, \dots, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}$  ಗಳೆಲ್ಲವೂ  $-3$  ಮತ್ತು  $0$  ಯ ನಡುವೆಯಿವೆ.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ  $5$  ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 1.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

(i)  $\frac{9}{7}$

(ii)  $-\frac{7}{5}$

2.  $-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{9}{13}$  ಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

3.  $\frac{5}{6}$  ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಐದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

4.  $-1$  ಮತ್ತು  $2$  ರ ನಡುವಿನ  $12$  ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.  $\frac{2}{3}$  ಮತ್ತು  $\frac{3}{4}$  ರ ನಡುವೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ ಸೂಚನೆ:- ನೀಡಿದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಜಾತಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ ]

6.  $-\frac{3}{4}$  ಮತ್ತು  $\frac{5}{6}$  ರ ನಡುವೆಯಿರುವ  $10$  ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.6 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶಗಳಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು  $\frac{p}{q}$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ  $p, q$  ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು  $q \neq 0$ . ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆಯೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿ**

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ  $\frac{25}{16}$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಹಂತ-1 : ಅಂಶವನ್ನು ಭೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ

$$16 \overline{)25} (1$$

ಹಂತ-2 : ಶೇಷವು ಭಾಜಕಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬರುವವರೆಗೂ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{16} \\ 9 \end{array}$$

ಹಂತ-3 : ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವನ್ನಿಡಿ.

ಹಂತ-4 : ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಶೇಷದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನಿಡಿ. ಈಗ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ.

$$16 \overline{)25.0} (1.$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{16} \\ 90 \end{array}$$

ಹಂತ-5 : ನಾಲ್ಕನೇ ಹಂತವನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದ ನಂತರ ಬೇಕಾದ ಸ್ಥಾನ ಬರುವವರೆಗೂ ಇಲ್ಲವೇ ಸೊನ್ನೆ ಬರುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ.

$$16 \overline{)25.0000} (1.5625$$

ಅದ್ದರಿಂದ  $\frac{25}{16} = 1.5625$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{16} \\ 90 \end{array}$$

$$90$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \underline{80} \\ 100 \end{array}$$

ಈಗ ನಾವು  $\frac{17}{5}$  ನ್ನು ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

$$100$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \underline{96} \\ 40 \end{array}$$

$$5 \overline{)17.0} (3.4$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{15} \\ 20 \end{array}$$

$$20$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

$$0$$

$$40$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \underline{32} \\ 80 \end{array}$$

$$80$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

$$0$$

ಅದ್ದರಿಂದ  $\frac{17}{5} = 3.4$

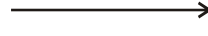
$\frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{8}{125}, \frac{1974}{10}$  ಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸ ಬಹುದು . ಈ ರೀತಿಯ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು 'ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳೆ' ಎನ್ನುವರು.

**ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅವರ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳು**

ಈಗ  $\frac{5}{3}$  ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ



$$\begin{array}{r} 3 \overline{)5.000} \quad (1.666 \\ \underline{3} \phantom{000} \\ 20 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 20 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 20 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 2 \phantom{00} \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ  $\frac{5}{3} = 1.666\dots$

ಇದನ್ನು  $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$  ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗದಲ್ಲಿ '6' ರ ಮೇಲಿರುವ ಗೆರೆ '6'

ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಪ್ರತಿಸಾರಿ ಒಂದೇ ಶೇಷ 2' ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು

$\frac{1}{7}$  ನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ



$$\begin{array}{r} 7 \overline{)10.00000000} \quad (0.14285714 \\ \underline{7} \phantom{00000000} \\ 30 \phantom{0000000} \\ \underline{28} \phantom{0000000} \\ 20 \phantom{0000000} \\ \underline{14} \phantom{0000000} \\ 60 \phantom{000000} \\ \underline{56} \phantom{000000} \\ 40 \phantom{000000} \\ \underline{35} \phantom{000000} \\ 50 \phantom{000000} \\ \underline{49} \phantom{000000} \\ 10 \phantom{000000} \\ \underline{7} \phantom{000000} \\ 30 \phantom{000000} \\ \underline{28} \phantom{000000} \\ 2 \phantom{000000} \end{array}$$

$\frac{1}{7} = 0.142857142857\dots$

$\frac{1}{7} = \overline{0.142857}$

ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗದಲ್ಲಿ 142857 ಮೇಲೆ ಇರುವ ಗೆರೆ (ಬಾರ್) ಆ ಅಂಕಗಳು ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶರೂಪ ಅಂತ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ ಅವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತಿದೆ. ಈ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಅವರ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಅವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ' ಗಳೆನ್ನುವರು..

$\frac{1}{3}$ ,  $\frac{17}{6}$ ,  $\frac{11}{9}$  ಮತ್ತು  $\frac{20}{19}$  ಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$\frac{1}{3} = \boxed{\phantom{000}} \quad \frac{17}{6} = \boxed{\phantom{000}} \quad \frac{11}{9} = \boxed{\phantom{000}} \quad \frac{20}{19} = \boxed{\phantom{000}}$

ಮೇಲಿನ ಪರಿಹಾರಗಳಿಂದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವಾಗ ಭಾಗಾಕಾರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹಂತಗಳ ನಂತರ ಶೇಷ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಬಹುದು. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಒಂದು ಅಂಕ ಇಲ್ಲದೆ ಕೆಲವು ಅಂಕಗಳ ಸಮೂಹ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$$\text{ಉದಾಹರಣೆಗೆ } 0.33333\text{-----} = 0.\overline{3}$$

$$0.12757575\text{-----} = 0.12\overline{75}$$

$$123.121121121121\text{-----} = 123.\overline{121}$$

$$5.678888\text{-----} = 5.6\overline{78} \text{ ಮೊದಲಾದವು.}$$

ಈ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಅವರ್ತದಶಮಾಂಶಗಳೆನ್ನುವರು. ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆದರೆ ಅವರ್ತಿತದಶಮಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಅವರ್ತಕ ವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹ ( ಗೆರೆಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)ವನ್ನು ವ್ಯವಧಿ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$0.3333 \text{ .....} = 0.\overline{3} \text{ ರ ವ್ಯವಧಿ } 3$$

$$0.12757575 \text{ ....} = 0.12\overline{75} \text{ ವ್ಯವಧಿ } 75$$

ಒಂದು ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಅವರ್ತಿತ ದಶಮಾಂಶದ ವ್ಯವಧಿ ಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಧಿ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$0.3333 \text{ .....} = 0.\overline{3} \text{ ರ ಅವಧಿ } 1$$

$$0.12757575 \text{ ....} = 0.12\overline{75} \text{ ರ ಅವಧಿ } 2$$

$$0.23143143143\text{.....} \text{ ರ ಅವಧಿ} = \text{_____} \text{ ಮತ್ತು ವ್ಯವಧಿ} = \text{_____}$$

$$125.6788989 \text{ .....} \text{ ರ ಅವಧಿ} = \text{_____} \text{ ಮತ್ತು ವ್ಯವಧಿ} = \text{_____}$$

### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ:



1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

(i)  $\frac{7}{5}$  ,  $\frac{3}{4}$  ,  $\frac{23}{10}$  ,  $\frac{5}{3}$  ,  $\frac{17}{6}$  ,  $\frac{22}{7}$

(ii) ಮೇಲಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶಗಳು? ಯಾವುವು ಅಂತ್ಯವಾಗದ ದಶಮಾಂಶಗಳು.

(iii) ಮೇಲಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭೇದಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(iv) ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಮೇಲಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭೇದಗಳಿಗೆ 2,5 ಆಲ್ಲದೆ ಇತರ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.



1.7 ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಗಳಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದು.

1.7.1 ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸುವುದು.

15.75 ಎಂಬ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಹಂತ 1:** ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ. 15.75 ನಲ್ಲಿ ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿವೆ.

**ಹಂತ 2:** 1 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳಿವೆಯೋ ಅಷ್ಟು ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿರಿ.

**ಹಂತ 3:** ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿರಿ

$$15.75 \times \frac{100}{100} = \frac{1575}{100}$$

**ಹಂತ 4:** ನಮಗೆ ದೊರೆತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\frac{1575}{100} = \frac{1575 \div 5}{100 \div 5} = \frac{315 \div 5}{20 \div 5} = \frac{63}{4}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 9:** ಕೆಳಗಿನ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು  $\frac{p}{q}$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 0.35      (ii) -8.005      (iii) 2.104

**ಸಾಧನೆ:** (i)  $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$

(ii)  $-8.005 = \frac{-8005}{1000} = \frac{-8005 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{-1601}{200}$

(iii)  $2.104 = \frac{2104}{1000} = \frac{2104 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{526 \div 2}{250 \div 2} = \frac{263}{125}$

1.7.2 ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸುವುದು.

ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 10:** ಕೆಳಗಿನ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ರೂಪಕ್ಕೆ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿರಿ.

(i)  $0.\bar{4}$       (ii)  $0.\bar{54}$       (iii)  $4.\bar{7}$

**ಸಾಧನೆ (i):**  $0.\bar{4}$

$x = 0.\bar{4}$  ಎಂದು ಕೊಳ್ಳಿ

$\Rightarrow x = 0.444 \dots$  -----(i)

ಇಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶದ ಅವಧಿ ಒಂದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (i) ಎರಡೂ ಕಡೆ 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ.

$$10x = 4.44 \dots \text{-----(ii)}$$

ಸಮೀಕರಣ (ii) ರಿಂದ (i) ನ್ನು ಕಳೆಯೋಣ.

$$\begin{array}{r} 10x = 4.444\dots \\ x = 0.444\dots \\ \hline 9x = 4.000\dots \\ \hline x = \frac{4}{9} \end{array}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } 0.\overline{4} = \frac{4}{9}$$

**ಪರಿಹಾರ (ii):**  $0.\overline{54}$

$x = 0.\overline{54}$  ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\Rightarrow x = 0.545454\dots \text{----- (i)}$$

ನೀಡಿದ ದಶಮಾಂಶದ ಅವಧಿ=2

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$100x = 54.5454\dots \text{----- (ii)}$$

ಸಮೀಕರಣ (ii) ರಿಂದ (i) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$\begin{array}{r} 100x = 54.5454 \dots \\ x = 0.5454 \dots \\ \hline 99x = 54.0000\dots \end{array}$$

$$x = \frac{54}{99}. \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } 0.\overline{54} = \frac{54}{99} .$$

**ಪರಿಹಾರ (iii):**  $4.\overline{7}$

$x = 4.\overline{7}$  ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$x = 4.777\dots \text{----- (i)}$$

ದತ್ತ ದಶಮಾಂಶದ ಅವಧಿ ಒಂದು

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$10x = 47.777\dots \text{----- (ii)}$$

ಸಮೀಕರಣ (ii) ರಿಂದ (i) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$\begin{array}{r} 10x = 47.777 \dots \\ x = 4.777 \dots \\ \hline 9x = 43.000\dots \end{array}$$

ಗಮನಿಸಿ

$$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$$

$$0.\overline{5} = \frac{5}{9}$$

$$0.\overline{54} = \frac{54}{99}$$

$$0.\overline{745} = \frac{745}{999}$$

$$x = \frac{43}{9}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } 4.\bar{7} = \frac{43}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿ: } 4.\bar{7} &= 4 + 0.\bar{7} \\ &= 4 + \frac{7}{9} \\ &= \frac{9 \times 4 + 7}{9} \\ 4.\bar{7} &= \frac{43}{9} \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 11:** ಮಿಶ್ರಮಾವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ  $15.\overline{732}$  ನ್ನು  $\frac{p}{q}$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ:**  $x = 15.\overline{732}$  ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$x = 15.732323232\dots \text{-----(i)}$$

32 ಅವರ್ತಕ

ದತ್ತ ದಶಮಾಂಶದ ಅವಧಿ = 2

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$100x = 1573.2323\dots \text{-----(ii)}$$

ಸಮೀಕರಣ (ii) ರಿಂದ (i) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$100x = 1573.232323\dots$$

$$x = 15.732323\dots$$

$$\hline 99x = 1557.50$$

$$x = \frac{1557.5}{99} = \frac{15575}{990}$$

$$= 15.\overline{732} = \frac{15575}{990}$$

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :**



$0.\bar{9}$ ,  $14.\bar{5}$  ಮತ್ತು  $1.2\bar{4}$  ಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಾಧನಾ ಪದ್ಧತಿಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಸುಲಭವಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬಲ್ಲೆಯಾ?



## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.3

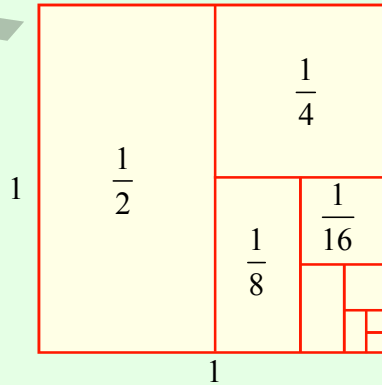
1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು  $\frac{p}{q}$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
  - (i) 0.57
  - (ii) 0.176
  - (iii) 1.00001
  - (iv) 25.125
2. ಕೆಳಗಿನ ಅವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ ( $\frac{p}{q}$ ).
  - (i)  $0.\overline{9}$
  - (ii)  $0.\overline{57}$
  - (iii)  $0.\overline{729}$
  - (iv)  $12.\overline{28}$
3. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ  $(x + y) \div (x - y)$  ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.
  - (i)  $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{4}$
  - (ii)  $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{2}$
4.  $-\frac{13}{5}$  ಮತ್ತು  $\frac{12}{7}$  ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು  $-\frac{13}{7}$  ಮತ್ತು  $-\frac{1}{2}$  ರ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.
5. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ  $\frac{2}{5}$  ನೇ ಭಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ  $\frac{1}{7}$  ರ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ 36 ಹೆಚ್ಚು ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 11 ಮೀ ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದಿಂದ  $2\frac{3}{5}$  ಮೀ ಮತ್ತು  $3\frac{3}{10}$  ಮೀ ಉದ್ದದ ಎರಡು ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಉಳಿದ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?
7.  $7\frac{2}{3}$  ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ₹ $12\frac{3}{4}$ . ಆದರೆ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
8.  $18\frac{3}{5}$  ಮೀ ಉದ್ದ ಮತ್ತು  $8\frac{2}{3}$  ಮೀ ಅಗಲದ ಒಂದು ಅಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?
9.  $-\frac{33}{16}$  ನ್ನು ಯಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ  $-\frac{11}{4}$  ಬರುತ್ತದೆ?
10. 64 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಬಟ್ಟೆಯಿಂದ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯ 36 ಪ್ಯಾಂಟ್ ತಯಾರಿಸಿದರೆ ಒಂದೊಂದು ಪ್ಯಾಂಟ್ ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?
11. ಅವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆ  $0.363636 \dots$  ನ್ನು  $\frac{p}{q}$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದ್ದು  $p + q$  ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



**ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು**

1. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನ ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಸಂವೃತ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.
2. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ
  - (i) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು
  - (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.
3. '0' ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ
4. '1' ಶಬ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತಾಂಶ
5. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ ವಿಲೋಮ (ವಿರುದ್ಧ) ಚಿಹ್ನೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.
6. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶಭೇದಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ (ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಮಾಡಿದಾಗ) ದೊರೆಯುವುದು ಅದರ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ.
7. ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ:  $a, b, c$  ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ  
 $a ( b + c ) = ab + ac$  ಮತ್ತು  $a ( b - c ) = ab - ac$
8. ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.
9. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲು ಸರಾಸರಿ ನಿಯಮ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
10. ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ಇಲ್ಲವೇ ಅಂತ್ಯವಾಗದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$a_n$  ಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಊಹಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ? ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಚೌಕದ ವಿಭಜನೆಯ ದೃಶ್ಯವನ್ನು ನಿನ್ನ ಉತ್ತರದ ಸಮರ್ಥನೆಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.



ಸೂಚನೆ :  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots \dots a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$a_1 = 1 - \frac{1}{2}, a_2 = 1 - \frac{1}{4}, a_3 = 1 - \frac{1}{8} \dots \dots$  ಆಗ  $a_n = ?$

## ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

### 2.0 ಅಧ್ಯಾಯ

ಸಾಗರ್ ಮತ್ತು ಲತಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಸಾಗರ್, ಲತಾಳೊಂದಿಗೆ ನಾನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯೋಚಿಸಿದ್ದೇನೆ ಅದನ್ನು ಎರಡರಷ್ಟುಗೊಳಿಸಿ ಉತ್ತರದಿಂದ 7 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ 35 ಬಂದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ನಾನು ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ? ಎಂದು ಸಾಗರ್ ಲತಾಳನ್ನು ಕೇಳಿದ. ಲತಾ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೊತ್ತು ಆಲೋಚಿಸಿ ಉತ್ತರ ಹೇಳಿದಳು. ಹಾಗಾದರೆ ನೀನು ಸಹ ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ? ಲತಾ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಉತ್ತರ ಹೇಳಿದಳು ನೋಡೋಣ. ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'x' ಎಂದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ದ್ವಿಗುಣ ಗೊಳಿಸಿದರೆ '2x' ಆಗುತ್ತದೆ.



ನಂತರ  $2x$  ನಿಂದ 7 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ  $2x - 7$  ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗಾದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 35 ಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಎಂದು ಸಾಗರ್ ಹೇಳುತ್ತಾನೆ.

$$\Rightarrow 2x - 7 = 35$$

$$\therefore 2x = 35 + 7 \text{ (7ನ್ನು ಸ್ಥಾನಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ)}$$

$$2x = 42$$

$$\therefore x = \frac{42}{2} \text{ (2 ನ್ನು ಸ್ಥಾನಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ)}$$

$$\therefore x = 21$$

$\therefore$  ಸಾಗರ್ ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 21.

#### ಉಪಾಯ

ಅಂತಿಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 7 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅರ್ಧ ಮಾಡುವುದು.

#### ಸೂಚನೆ

ಪದಗಳು ಸ್ಥಳಾಂತವಾದಾಗ

'+' ರಾಶಿ ಸ್ಥಳಾಂತವಾದರೆ '-' ರಾಶಿಯಾಗಿ

'-' ರಾಶಿ ಸ್ಥಳಾಂತವಾದರೆ '+' ರಾಶಿಯಾಗಿ

'x' ರಾಶಿ ಸ್ಥಳಾಂತವಾದರೆ '÷' ರಾಶಿಯಾಗಿ

'÷' ರಾಶಿ ಸ್ಥಳಾಂತವಾದರೆ 'x' ರಾಶಿಯಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ.

$2x - 7 = 35$  ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ, ಎಂದು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸುವ ಮೂಲಕ ಸಾಗರ್ ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲತಾ ಹೇಳಿದಳು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತಪದದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಇಲ್ಲವೇ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು, ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನ, ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಸರಳ ಸಮೀಕರಣದ ಕುರಿತು ನಮಗೆ ತಿಳಿದುದನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿತಿಸೋಣ!

ಸರಳ ಸಮೀಕರಣದ ಕುರಿತು ನಮಗೆ ತಿಳಿದುದನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿತಿಸೋಣ.

- (i) ಒಂದು ಬೀಜ ಸಮೀಕರಣವೆಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಹಾಗೂ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಸಮತ್ವವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{2x - 7} & = & \textcircled{35} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{L.H.S} & & \text{R.H.S} \end{array}$$

- (ii) ಇದು ಸಮತ್ವ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.
- (iii) ಸಮತ್ವ ಚಿಹ್ನೆಯ ಎಡಭಾಗದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗೆ ಸಮೀಕರಣದ LHS(Left Hand Side) ಎನ್ನುವರು.
- (iv) ಸಮತ್ವ ಚಿಹ್ನೆಯ ಬಲಭಾಗದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗೆ ಸಮೀಕರಣದ RHS(Right Hand Side) ಎನ್ನುವರು.
- (iv) ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ LHS ಮತ್ತು RHS ಸಮ, ಆದರೆ ಇದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರ ಅಥವಾ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಚರಾಕ್ಷರದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ(Solution)ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$\begin{aligned}
 2x - 7 &= 35 \text{ ಎನ್ನುವುದು} \\
 \text{for } x &= 21 \text{ ಮಾತ್ರವೇ} \\
 \text{i.e., } x &= 21 \\
 \text{LHS} &= 2x - 7 \\
 &= 2 \times 21 - 7 \\
 &= 35 \\
 &= \text{RHS} \\
 \therefore \text{ ಪರಿಹಾರ } x &= 21
 \end{aligned}$$

## 2.1 ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$(1) 2x - 7 = 35 \quad (2) 2x + 2y = 48 \quad (3) 4x - 1 = 2x + 5 \quad (4) x^2 + y = z$$

ಇಲ್ಲಿನ (1) (2) ಮತ್ತು (3) ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅವ್ಯಕ್ತಪದವಿದ್ದು ಅದರ ಗರಿಷ್ಠಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ ಒಂದು ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಒಂದನೇ ಘಾತ ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದಾದ ಸಮೀಕರಣವೇ ಇದನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳೆನ್ನುವರು. ಹಾಗೆಯೇ (4) ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಗರಿಷ್ಠಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ ಒಂದು ಅಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವುದಿಲ್ಲ.

ಹಾಗೆಯೇ (1) (2) ಮತ್ತು (3) ಸಮೀಕರಣಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು (4) ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಗರಿಷ್ಠಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ ಒಂದು ಅಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.



### ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಾವುವು ?

- (i)  $4x + 6 = 8$       (ii)  $4x - 5y = 9$       (iii)  $5x^2 + 6xy - 4y^2 = 16$
- (iv)  $xy + yz + zx = 11$       (v)  $3x + 2y - 6 = 0$       (vi)  $3 = 2x + y$
- (vii)  $7p + 6q + 13s = 11$

## 2.2 ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅಥವಾ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$(i) 2x - 7 = 35 \quad (ii) 4x - 1 = 2x + 5 \quad (iii) 2x + 2y = 48$$

ಇವೆಲ್ಲ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(i) ಮತ್ತು (ii) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿವೆ. (iii) ನೇ ಸಮೀಕರಣವು 'x' ಮತ್ತು 'y' ಎಂಬ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವರು.

ಆದ್ದರಿಂದ  $a, b$  ಸ್ಥಿರರಾಶಿಗಳು  $a \neq 0$  ಆಗುತ್ತಾ  $ax + b = 0$  ಇಲ್ಲವೆ  $ax = b$  ರೂಪದಲ್ಲಿರುವವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಅಥವಾ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವರು.



### ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಾವುವು ?

(i)  $3x + 5 = 14$

(ii)  $3x - 6 = x + 2$

(iii)  $3 = 2x + y$

(iv)  $\frac{x}{3} + 5 = 0$

(v)  $x^2 + 5x + 3 = 0$

(vi)  $5m - 6n = 0$

(vii)  $7p + 6q + 13s = 11$

(viii)  $13t - 26 = 39$

### 2.3 ಒಂದೇ ಕಡೆ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ

ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವೇ ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಲತಾ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಸಾಗರ್ ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಿದಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 1:  $3y + 39 = 8$  ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ  $3y + 39 = 8$

$$3y = 8 - 39 \text{ (39 ನ್ನು RHS ಕಡೆಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ)}$$

$$3y = -31$$

$$y = \frac{-31}{3} \text{ (3 ನ್ನು RHS ಕಡೆಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ)}$$

$$\therefore 3y + 39 = 8 \text{ ರ ಮೂಲ } y = \frac{-31}{3}$$

ಇಲ್ಲಿಮೂಲ  $(\frac{-31}{3})$  ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದೀರಾ ?

ತಾಳೆನೋಡುವುದು:  $LHS = 3y + 39 = 3(\frac{-31}{3}) + 39 = -31 + 39 = 8 \text{ RHS}$

ಉದಾಹರಣೆ 2:  $\frac{7}{4} - p = 11$  ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :  $\frac{7}{4} - p = 11$

### ಸತ್ಯವೋ/ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

ಕಾವ್ಯ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾಳೆ.

$$3x + x + 5x = 72$$

$$9x = 72 \quad x = 72 \times 9 = 648$$

ಆಕೆ ಎಲ್ಲಿ ತಪ್ಪುಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ ?

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



$$-p = 11 - \frac{7}{4} \quad \left( \frac{7}{4} \text{ ನ್ನು RHS ಸ್ಥಳಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ} \right)$$

$$-p = \frac{44 - 7}{4}$$

$$-p = \frac{37}{4}$$

$$\therefore p = -\frac{37}{4} \quad \left( \text{ಎರಡೂ ಕಡೆ } -1 \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ} \right)$$

p ಯನ್ನು LHS ನಿಂದ RHS ಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಮಾಡುವುದರಿಂದ p ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

p ನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

$$\text{ತಾಳೆನೋಡುವುದು: LHS} = \frac{7}{4} - p = \frac{7}{4} - \left(-\frac{37}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{37}{4} = \frac{7+37}{4} = \frac{44}{4} = 11 = \text{RHS}$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 2.1

ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ:

(i)  $6m = 12$

(ii)  $14p = -42$

(iii)  $-5y = 30$

(iv)  $-2x = -12$

(v)  $34x = -51$

(vi)  $\frac{n}{7} = -3$

(vii)  $\frac{2x}{3} = 18$

(viii)  $3x + 1 = 16$

(ix)  $3p - 7 = 0$

(x)  $13 - 6n = 7$

(xi)  $200y - 51 = 49$

(xii)  $11n + 1 = 1$

(xiii)  $7x - 9 = 16$

(xiv)  $8x + \frac{5}{2} = 13$

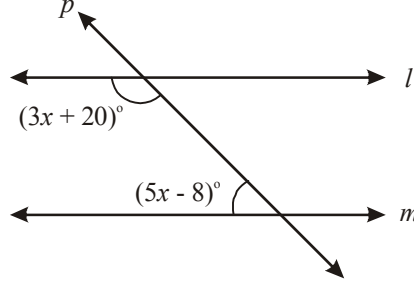
(xv)  $4x - \frac{5}{3} = 9$

(xvi)  $x + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{2}$

### 2.3.1 ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳು :

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ :

**ಉದಾಹರಣೆ 3:**  $l \parallel m$ , ಆದರೆ 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ  $l \parallel m$  ಹಾಗೆಯೇ  $p$  ಒಂದು ಭೇದಕ ರೇಖೆ ಹಾಗಾದರೆ  $(3x + 20)^\circ + (5x - 8)^\circ = 180^\circ$  (ಭೇದಕ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಒಳ ಕೋನಗಳು).

$$3x + 20^\circ + 5x - 8^\circ = 180^\circ$$

$$8x + 12^\circ = 180^\circ$$

$$8x = 180^\circ - 12^\circ$$

$$8x = 168^\circ$$

$$x = \frac{168^\circ}{8} = 21^\circ$$

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 29 ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕಿಂತ 5 ಹೆಚ್ಚು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇದು ನಮಗೊಂದು ಫಜಿಲ್. ನಮಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ತಿಳಿದಿಲ್ಲನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'x' ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ 'x + 5' ಆಗುವುದು.

ಈ ಎರಡರ ಮೊತ್ತ 29 ಎಂದು ನೀಡಿರುವುದರಿಂದ

$$\Rightarrow x + x + 5 = 29$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 29$$

$$\therefore 2x = 29 - 5$$

$$\therefore 2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2} \quad (\text{'2'ನ್ನು RHS ಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ})$$

$$x = 12.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ:  $x = 12$  ಮತ್ತು

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ:  $x + 5 = 12 + 5 = 17$ .

**ತಾಳೆನೋಡುವುದು:**  $17, 12$  ಕ್ಕಿಂತ  $5$  ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು  $= 12 + 17 = 29$ .

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ  $4$  ರಷ್ಟರಿಂದ  $5$  ನ್ನು ಕಳೆದರೆ  $19$  ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ' $x$ ' ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಇದರ  $4$  ರಷ್ಟು ' $4x$ ' ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ' $4x$ ' ನಿಂದ  $5$  ಕಳೆದರೆ ಫಲಿತ  $19$  ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ.

$$\Rightarrow 4x - 5 = 19$$

$$4x = 19 + 5 \quad (-5 \text{ ನ್ನು RHS ಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ})$$

$$4x = 24$$

$$\therefore x = \frac{24}{4} \quad (4 \text{ ನ್ನು RHS ಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರ ಮಾಡಿದಾಗ})$$

$$\Rightarrow x = 6$$

ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ =  $6$

**ತಾಳೆನೋಡುವುದು:**  $6$  ರ  $4$  ರಷ್ಟು  $24$  ಮತ್ತು  $24 - 5 = 19$ .

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಉದ್ದ ಅದರ ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ  $17$  ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು. ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಸುತ್ತಳತೆ  $178$  ಮೀಟರ್ ಅದರ ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಅಗಲ =  $x$  ಮೀಟರ್

ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಉದ್ದ =  $x + 17$  ಮೀಟರ್

$$\therefore \text{ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಸುತ್ತಳತೆ} = 2 (\text{ಉದ್ದ} + \text{ಅಗಲ})$$

$$= 2 (x + 17 + x) \text{ ಮೀಟರ್}$$

$$= 2 (2x + 17) \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಆದರೆ ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಸುತ್ತಳತೆ  $178$  ಮೀ ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore 2 (2x + 17) = 178$$

$$4x + 34 = 178$$

$$4x = 178 - 34$$

$$4x = 144$$

$$x = \frac{144}{4} = 36$$

ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಅಗಲ = 36 ಮೀಟರ್‌ಗಳು

ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಉದ್ದ = 36 + 17 = 53 ಮೀಟರ್‌ಗಳು

**ತಾಳೆನೋಡುವುದು : ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.**

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಎರಡು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 34 ಆದರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಚಿಕ್ಕ ಕೋನವನ್ನು  $x^\circ$  ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ  $34^\circ$ , ಆದ್ದರಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಕೋನವು  $= x + 34^\circ$

ಪರಿಪೂರ್ಣ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ  $180^\circ$  ಆದ್ದರಿಂದ

$$\text{ನಾವು } x + (x + 34) = 180^\circ$$

$$2x + 34 = 180^\circ$$

$$2x = 180 - 34 = 146^\circ$$

$$x = \frac{146^\circ}{2} = 73^\circ$$

ಚಿಕ್ಕ ಕೋನವು  $= x = 73^\circ$

ದೊಡ್ಡ ಕೋನವು  $= x + 34 = 73 + 34 = 107^\circ$

**ಉದಾಹರಣೆ 8:** ಪ್ರಸ್ತುತ ವಿಜಯಳ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು ವಿಜಯ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ 4 ರಷ್ಟು. 6 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೊತ್ತ 62 ವರ್ಷಗಳು, ಅವರ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ವಿಜಯಳ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು ' $x$ ' ಎಂದು ಕೊಂಡಾಗ

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು.

	ವಿಜಯ	ವಿಜಯಳ ತಾಯಿ
ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು	$x$	$4x$
6 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ವಯಸ್ಸು	$x + 6$	$4x + 6$

$$\begin{aligned} \therefore 6 \text{ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರುಗಳ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೊತ್ತ} &= (x + 6) + (4x + 6) \\ &= x + 6 + 4x + 6 \\ &= 5x + 12 \end{aligned}$$

ಆದರೆ 6 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮೊತ್ತ 62 ವರ್ಷಗಳೆಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Rightarrow 5x + 12 = 62$$

$$5x = 62 - 12$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10$$

ವಿಜಯಳ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು =  $x = 10$  ವರ್ಷಗಳು

ವಿಜಯಳ ತಾಯಿಯ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು =  $4x = 4 \times 10 = 40$  ವರ್ಷಗಳು

**ಉದಾಹರಣೆ 9 :** ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 90 ಬಹು ಆಯ್ಕೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ, ಪ್ರತಿ ಸರಿಯುತ್ತರಕ್ಕೆ 2 ಅಂಕಗಳು ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 1 ಅಂಕ ಕಳೆಯುವರು. ಸಹನಾ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ 60 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದರೆ ಆಕೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದ್ದಾಳೆ.

**ಪರಿಹಾರ :**

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 'x' ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ,

ತಪ್ಪು ಉತ್ತರ ನೀಡಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $90 - x$

ಪ್ರತಿ ಸರಿಯುತ್ತರಕ್ಕೆ 2 ಅಂಕಗಳು ಅದರೆ

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಬರುವ ಅಂಕಗಳು =  $2x$

ಪ್ರತಿ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅಂಕ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗಾದರೇ ಕಡಮೆ ಮಾಡುವ ಅಂಕಗಳು

$$= (90 - x) \times 1 = 90 - x$$

$$\therefore \text{ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು} = 2x - (90 - x) = 2x - 90 + x = 3x - 90$$

ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಅಂಕ 60 ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Rightarrow 3x - 90 = 60$$

$$3x = 60 + 90$$

$$3x = 150$$

$$x = \frac{150}{3} = 50$$

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಗುರ್ತಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $x = 50$

**ಉದಾಹರಣೆ 10:** ರವಿ ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕ್ ನಲ್ಲಿ ಕ್ಯಾಷಿಯರ್ ಆಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಈತನ ಬಳಿ ₹ 100, ₹ 50, ₹ 10 ನೋಟುಗಳು 2 : 3 : 5 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 4,00,000. ಆದರೆ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ನೋಟುಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆಯೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**

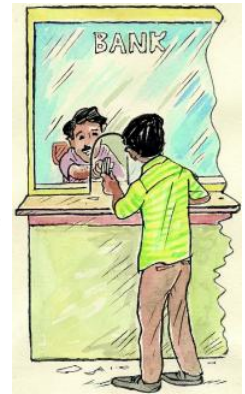
₹ 100 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $2x$

₹ 50 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $3x$

₹ 10 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $5x$

$$\therefore \text{ಒಟ್ಟು ನೋಟುಗಳ ಬೆಲೆ} = (2x \times 100) + (3x \times 50) + (5x \times 10)$$

$$200x + 150x + 50x = 400x$$



$2x : 3x : 5x$  ಮತ್ತು  
 $2 : 3 : 5$  ಇವು ಸಮವೆಂದು  
ಗಮನಿಸಬಹುದು

ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ನೋಟುಗಳ ಬೆಲೆ 4, 00,000 ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Rightarrow 400x = 4, 00,000$$

$$x = \frac{400000}{400} = 1000$$

$$\text{₹ 100 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 2x = 2 \times 1000 = 2000$$

$$\text{₹ 50 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 3x = 3 \times 1000 = 3000$$

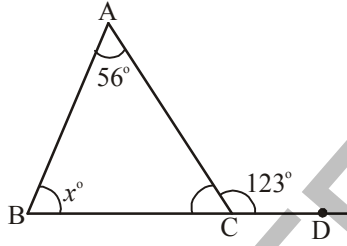
$$\text{₹ 10 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 5x = 5 \times 1000 = 5000$$



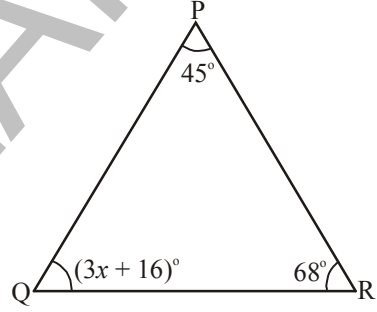
### ಅಭ್ಯಾಸ - 2.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ 'x' ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

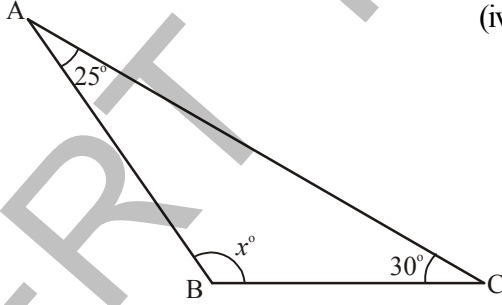
(i)



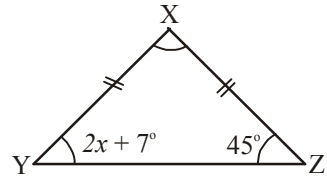
(ii)



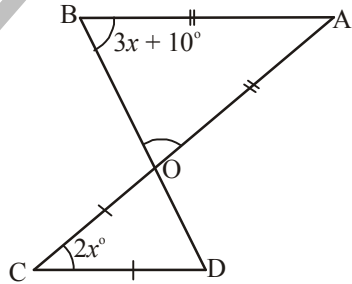
(iii)



(iv)



(v)



2. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 8. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 2 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಮೊತ್ತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಮೊತ್ತ 58, ವ್ಯತ್ಯಾಸ 28 ಆಗುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
4. ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 56 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು ?
5. ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ 7ರ ಅಪವರ್ತಗಳ ಮೊತ್ತ 777 ಆದರೆ ಆ ಅಪವರ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(ಸೂಚನೆ: ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ 7ರ ಅಪವರ್ತಗಳು 'x', 'x + 7', 'x + 14')
6. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ 10 ಕಿ.ಮೀ ಕಾಲು ನಡಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ನಂತರ ಆತ ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರವನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲೂ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದನು. ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರ, ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರದ ಎರಡರಷ್ಟು. ಅವನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರ 70 ಕಿ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆತ ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರ ಎಷ್ಟು?
7. ವಿನಯ್ ಒಂದು ಪಿಜ್ಜಾ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಮೂರು ತುಂಡುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದನು. ಇವುಗಳನ್ನು ತೂಕಮಾಡಿದಾಗ ಮೊದಲನೆಯ ತುಂಡು ಎರನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 7ಗ್ರಾಂ. ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 4ಗ್ರಾಂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಯೂ ಇದೆ. ಪಿಜ್ಜಾದ ಒಟ್ಟು ತೂಕ 300ಗ್ರಾಂ ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ತುಂಡಿನ ತೂಕ ಎಷ್ಟು?  
(ಸೂಚನೆ: ಮೊದಲನೆಯ ತುಂಡಿನ ತೂಕ 'x' ಗ್ರಾಂ ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ ಎರಡನೆಯದರ ತೂಕ 'x + 7' ಗ್ರಾಂ, ಮೂರನೆಯದರ ತೂಕ 'x - 4' ಗ್ರಾಂ)
8. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ಸುತ್ತಳತೆ 400 ಮೀಟರ್‌ಗಳು. ಅದರ ಉದ್ದ, ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 26 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ಉದ್ದ ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 8 ಮೀ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ. ಹೊಲದ ಸುತ್ತಳತೆ 56 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳ ಅಳತೆ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿನ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಮೀ ಕಡಿಮೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ 55 ಮೀ ಆದರೆ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಎರಡು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ  $12^\circ$ , ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ರಾಹುಲ್ ಮತ್ತು ಲಕ್ಷ್ಮೀಯ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಅನುಪಾತ 5:7. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮೊತ್ತ 56 ವರ್ಷಗಳಾದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?
13. ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 180 ಬಹು ಆಯ್ಕೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸರಿ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗುವುದು. ಉತ್ತರ ನೀಡದೇ ಇರುವ ಹಾಗೂ ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಒಂದು ಅಂಕ ಕಳೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗೆ ಈ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 450 ಅಂಕಗಳು ಬಂದರೆ ಆ ಅಭ್ಯರ್ಥಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ನೀಡಿರುತ್ತಾನೆ.?
14. ₹ 5 ರ ನೋಟುಗಳು, ₹ 10 ರ ನೋಟುಗಳು ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 90 ನೋಟುಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 500 ಆದರೆ ಯಾವ ನೋಟುಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ?  
(ಸೂಚನೆ: ₹ 5 ರ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 'x', ಆದರೆ ರೂ 10ರ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 90-x)

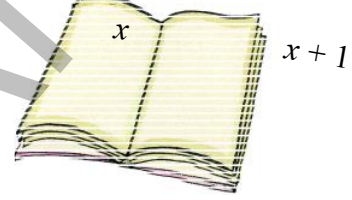


15. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ₹ 564 ಖರ್ಚುಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ಒಂದೊಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ 7 ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 3 ಹಾಗೂ ಒಟ್ಟು ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 108, ಆದರೆ ಆತ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ?

16. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ವಾಲಿಬಾಲ್ ಕೋರ್ಟ್‌ನ ಸುತ್ತಳತೆ 177 ಅಡಿಗಳು. ಇದರ ಉದ್ದ ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟು ಆದರೆ ವಾಲಿಬಾಲ್ ಕೋರ್ಟ್‌ನ ಉದ್ದ ಅಗಲಗಳೆಷ್ಟು?



17. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕ ತೆರೆದಿದೆ. ತೆರೆದಿರುವ ಆ ಎರಡು ಪುಟಗಳಲ್ಲಿ ಪೇಜ್ ನಂಬರ್‌ನ ಮೊತ್ತ 373 ಆದರೆ ಆ ಪೇಜ್ ನಂಬರ್‌ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(ಸೂಚನೆ: ತೆರೆದ ಪುಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $x$  ಮತ್ತು  $x+1$  ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ)



#### 2.4 ಎರಡೂ ಕಡೆ ಚರರಾಶಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ :

ಸಮೀಕರಣವೆಂದರೆ ಎರಡು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ನಡುವಿನ ಸಮತ್ವವೆಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.  $2x - 7 = 35$  ನಲ್ಲಿ  $2x - 7$  ಮತ್ತು 35. ಇವು ಎರಡು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ನಾವು ನೋಡಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ RHS ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಯಾವಾಗಲೂ ಹೀಗೆಯೇ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೂ ಕೂಡ ಇರಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣ ಯಾವ ರೀತಿ ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆಯೋ ತಿಳಿಯೋಣ.

**ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.**

**ಉದಾಹರಣೆ 11:** ರಫಿ ಮತ್ತು ಫಾತಿಮಾರ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಅನುಪಾತ 7 : 5. 10 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಅನುಪಾತ 9 : 7 ಆದರೆ ಅವರ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ರಫಿ ಮತ್ತು ಫಾತಿಮಾರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ಅನುಪಾತ 7 : 5.  
ಆದ್ದರಿಂದ ರಫಿಯ ವಯಸ್ಸನ್ನು  $7x$  ಎಂದೂ ಫಾತಿಮಾಳ ವಯಸ್ಸನ್ನು  $5x$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.  
(ಗಮನಿಸಿ  $7x$ ,  $5x$  ಗಳ ಅನುಪಾತ  $7x : 5x$  ಮತ್ತು 7:5 ಸಮವಾಗಿವೆ)

$$10 \text{ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ರಫಿಯ ವಯಸ್ಸು} = 7x + 10$$

$$\text{ಮತ್ತು ಫಾತಿಮಾಳ ವಯಸ್ಸು} = 5x + 10$$

$$10 \text{ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಅನುಪಾತ} = 7x + 10 : 5x + 10$$

ಹಾಗಾದರೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಈ ಅನುಪಾತ 9 : 7 ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

$$\Rightarrow 7x + 10 : 5x + 10 = 9 : 7$$

$$\text{i.e., } 7(7x + 10) = 9(5x + 10)$$



$$\Rightarrow 49x + 70 = 45x + 90.$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ?

ಈ ರೀತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಈಗ ತಿಳಿಯೋಣ!

$$\text{ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ } 49x + 70 = 45x + 90$$

$$\Rightarrow 49x - 45x = 90 - 70 \quad (70 \text{ ನ್ನು RHS ಗೂ, } 45x \text{ ನ್ನು LHS ಗೂ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ)}$$

$$\therefore 4x = 20$$

$$\therefore x = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{ರಫಿಯ ವಯಸ್ಸು} = 7x = 7 \times 5 = 35 \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

$$\text{ಮತ್ತು ಫಾತಿಮಾ ವಯಸ್ಸು} = 5x = 5 \times 5 = 25 \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 12:**  $5(x + 2) - 2(3 - 4x) = 3(x + 5) - 4(4 - x)$  ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$\text{ಪರಿಹಾರ : } 5x + 10 - 6 + 8x = 3x + 15 - 16 + 4x \quad (\text{ಆವರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ})$$

$$13x + 4 = 7x - 1 \quad (\text{ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ})$$

$$13x - 7x = -1 - 4 \quad (4 \text{ ನ್ನು RHS, } 7x \text{ ನ್ನು LHS ಗೂ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ})$$

$$6x = -5$$

$$x = \frac{-5}{6} \quad (6 \text{ ನ್ನು RHS ಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ})$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 2.3

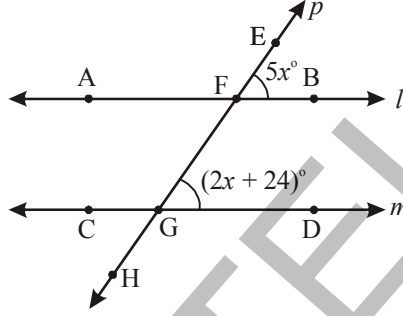
ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ

1.  $7x - 5 = 2x$
2.  $5x - 12 = 2x - 6$
3.  $7p - 3 = 3p + 8$
4.  $8m + 9 = 7m + 8$
5.  $7z + 13 = 2z + 4$
6.  $9y + 5 = 15y - 1$
7.  $3x + 4 = 5(x - 2)$
8.  $3(t - 3) = 5(2t - 1)$

9.  $5(p - 3) = 3(p - 2)$
10.  $5(z + 3) = 4(2z + 1)$
11.  $15(x - 1) + 4(x + 3) = 2(7 + x)$
12.  $3(5z - 7) + 2(9z - 11) = 4(8z - 7) - 111$
13.  $8(x - 3) - (6 - 2x) = 2(x + 2) - 5(5 - x)$
14.  $3(n - 4) + 2(4n - 5) = 5(n + 2) + 16$

### 2.4.1 ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳು

**ಉದಾಹರಣೆ 13:** ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ  $l \parallel m$ , ಮತ್ತು  $p$  ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಆದರೆ 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



**ಪರಿಹಾರ :**  $l \parallel m$ ,  $p$  ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ

$$\angle EFB = \angle FGD \text{ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } 5x^\circ = (2x + 24)^\circ$$

$$5x - 2x = 24$$

$$3x = 24$$

$$x = \frac{24}{3} = 8^\circ$$

**ಉದಾಹರಣೆ 14:** ಹೇಮ ತನ್ನ ಮಗಳು ಧಾಮಿನಿಗಿಂತ 24 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳು 6 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಹೇಮಳ ವಯಸ್ಸು ಧಾಮಿನಿ ವಯಸ್ಸಿನ 3 ರಷ್ಟು ಆದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಧಾಮಿನಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು 'x' ಎಂದುಕೊಂಡಾಗ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು.

	ಧಾಮಿನಿ	ಹೇಮ
ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು	x	x + 24
6 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ	x - 6	(x + 24) - 6 = x + 24 - 6 = x + 18

ಹಾಗಾದರೆ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ 6 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಹೇಮ ವಯಸ್ಸು ಧಾಮಿನಿ ವಯಸ್ಸಿನ 3 ರಷ್ಟು

$$\therefore x + 18 = 3(x - 6)$$

$$x + 18 = 3x - 18$$

$$x - 3x = -18 - 18$$

$$-2x = -36$$

$$x = 18.$$

ಧಾಮಿನಿಯ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು =  $x = 18$  ವರ್ಷಗಳು.

ಹೇಮಳ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು =  $x + 24 = 18 + 24 = 42$  ವರ್ಷಗಳು.

**ಉದಾಹರಣೆ 15:** ಒಂದು ಎರಡಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 8. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 18 ಸೇರಿಸಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳು ಅದಲು ಬದಲು ಆಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯನ್ನು 'x' ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\text{ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ} = 8 - x \quad (\text{ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 8})$$

$$\therefore \text{ಸಂಖ್ಯೆ} = 10(8 - x) + x = 80 - 10x + x = 80 - 9x \quad \text{--- (1)}$$

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ} &= 10 \times (x) + (8 - x) \\ &= 10x + 8 - x = 9x + 8 \end{aligned}$$

ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ 18 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಗಳು ಅದಲು ಬದಲುವಾಗುತ್ತವೆ.

$$\therefore \text{ಸಂಖ್ಯೆ} + 18 = \text{ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ}$$

$$\Rightarrow (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$$

$$98 - 9x = 9x + 8$$

$$98 - 8 = 9x + 9x$$

$$90 = 18x$$

$$x = \frac{90}{18} = 5$$

x ಬೆಲೆಯನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\therefore \text{ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ} = 80 - 9 \times 5 = 80 - 45 = 35.$$

**ಉದಾಹರಣೆ 16:** ಒಂದು ಮೋಟಾರ್ ಬೋಟ್ ನದಿ ಹರಿಯುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಾ ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು

5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಮೋಟಾರ್ ಬೋಟ್ ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಾ ಆ ದೂರವನ್ನು 6 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ನೀರಿನ ಹರಿವಿನ ವೇಗ 2 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ ಆದರೆ ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮೋಟಾರ್ ಬೋಟ್ ವೇಗ ಎಷ್ಟು?

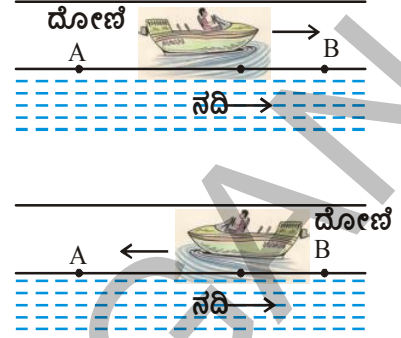


ಪರಿಹಾರ :

ನಾವು ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು  $x$  ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ನೀರಿನ ಪ್ರವಾಹದೊಂದಿಗೆ ದೋಣಿ ಸಾಗುವಾಗ ನೀರು ತನ್ನ ವೇಗದಿಂದ ದೋಣಿಯನ್ನು ಮುಂದಕ್ಕೆ ತಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನೀರು ಹರಿಯುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿರುವ ದೋಣಿಯ ವೇಗ =  $(x + 2)$  ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ..



$\therefore$  ನೀರು ಹರಿಯುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರ =  $5(x + 2)$  ಕಿ.ಮೀ.

A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ  $5(x + 2)$  ಕಿ.ಮೀ.

ಆದರೆ ದೋಣಿ ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಹೋಗುವಾಗ ಹರಿಯುವ ವೇಗಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಹೋಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುವಾಗ ದೋಣಿಯ ವೇಗ =  $(x - 2)$  ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ.

$\Rightarrow$  1 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ =  $(x - 2)$  ಕಿ.ಮೀ

6 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ =  $6(x - 2)$  ಕಿ.ಮೀ

ಆದರೆ A, B ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಸ್ಥಿರವಾದ್ದರಿಂದ

$\therefore 5(x + 2) = 6(x - 2)$

$\Rightarrow 5x + 10 = 6x - 12$

$\Rightarrow 5x - 6x = -12 - 10$

$\therefore -x = -22$

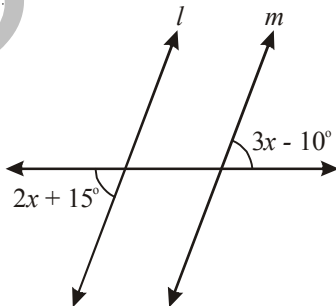
$x = 22.$

$\therefore$  ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ವೇಗ 22 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 2.4

1.  $l \parallel m$  ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



2. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 8 ರಷ್ಟರಿಂದ 10 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ ಬೆಲೆ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ 6 ರಷ್ಟು ಮತ್ತು 4ರ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 9. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 27 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳು ಅದಲು ಬದಲು ಆಗುತ್ತವೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?
4. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 5:3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಭಾಗವು ಎರಡನೇ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ 10 ಹೆಚ್ಚು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ನಾನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತ್ರಿಗುಣಗೋಳಿಸಿ 2 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಬಂದ ಉತ್ತರವು, ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 50 ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ ಬಂದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಮೇರಿಯ ವಯಸ್ಸು ಅವಳ ಸಹೋದರಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡರಷ್ಟು. 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮೇರಿ ವಯಸ್ಸು ಅವಳ ಸೋದರಿಯ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ 2 ವರ್ಷ ಹೆಚ್ಚು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ರೇಷ್ಮೆಳ ವಯಸ್ಸು 9 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅಕೆಯ ವಯಸ್ಸಿನ 3 ರಷ್ಟು ಹಾಗಾದರೆ ಅಕೆಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?
8. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ 1200 ಬೆಳೆದ ನಂತರ ಈಗಿನ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 11% ಇಳಿದಿದೆ. ಈಗ ಪಟ್ಟಣದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲಿದ್ದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 32 ಕಡಿಮೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಪಟ್ಟಣದ ಹಿಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

### 2.5 ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ 17:  $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$  ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :  $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3x - 2x}{6} = \frac{2+1}{4}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = \frac{3}{4} \times 6$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

(  $\frac{x}{3}$  ನ್ನು L.H.S. ಗೆ,  $\frac{1}{4}$  ನ್ನು R.H.S.ಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ)

( 2,3 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ 6 ; 2,4ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. 4)

( 6ನ್ನು R.H.S.ಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ)

ಇದು ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 18:  $\frac{x-4}{7} - \frac{x+4}{5} = \frac{x+3}{7}$  ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :  $\frac{x-4}{7} - \frac{x+4}{5} = \frac{x+3}{7}$

$$\frac{5(x-4) - 7(x+4)}{35} = \frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5x - 20 - 7x - 28}{35} = \frac{x+3}{7}$$

$$\frac{-2x - 48}{35} = \frac{x+3}{7}$$

$$-2x - 48 = \frac{(x+3)}{7} \times 35$$

$$\Rightarrow -2x - 48 = (x+3) \times 5$$

$$\Rightarrow -2x - 48 = 5x + 15$$

$$\Rightarrow -2x - 5x = 15 + 48$$

$$-7x = 63$$

$$x = \frac{63}{-7} = -9.$$

ಉದಾಹರಣೆ 19:  $\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$  ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ———(1)

ಪರಿಹಾರ : ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ  $2x+3$  ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$\frac{5x+2}{2x+3} \times (2x+3) = \frac{12}{7} \times (2x+3)$$

$$5x+2 = \frac{12}{7} \times (2x+3)$$

ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ 7 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$7 \times (5x+2) = 7 \times \frac{12}{7} \times (2x+3)$$

$$\Rightarrow 7 \times (5x + 2) = 12 \times (2x + 3) \quad \text{—————(2)}$$

$$35x + 14 = 24x + 36$$

$$35x - 24x = 36 - 14$$

$$11x = 22$$

$$\therefore x = \frac{22}{11} = 2$$

ಸಮೀಕರಣ (1), (2) ಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣ

$$7 \times (5x + 2) = 12 \times (2x + 3)$$

ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ? ಇಲ್ಲಿನಾವೇನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆಂದರೆ:

1. LHS ನ ಅಂಶವನ್ನು RHS ಭೇದದಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.
2. LHS ನ ಭೇದವನ್ನು RHS ನ ಅಂಶದಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\frac{5x+3}{2x+3} \swarrow = \frac{12}{7}$$

3. (1), (2) ಹಂತಗಳಿಂದ ಬಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸ ಬೇಕು  $7 \times (5x + 2) = 12 \times (2x + 3)$

$$\frac{5x+3}{2x+3} \searrow = \frac{12}{7}$$

ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಓರೆಗುಣಾಕಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 20:**  $\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$  ನ್ನು ಬಿಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಮೂಲಕ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$7 \times (x + 7) = 4 \times (3x + 16)$$

$$7x + 49 = 12x + 64$$

$$7x - 12x = 64 - 49$$

$$-5x = 15$$

$$x = -3$$

$$\frac{x+7}{3x+16} \searrow = \frac{4}{7}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 21:** ರೆಹಾನ ಒಂದು ಗೌನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡಾಗ 24% ರಿಯಾಯಿತಿ ಪಡೆದಳು. ರಿಯಾಯಿತಿಯ ನಂತರ ಆಕೆ ₹ 380 ನ್ನು ನೀಡಿದಳು. ಆದರೆ ಆ ಗೌನಿನ ಪ್ರಕಟಣೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಗೌನಿನ ಪ್ರಕಟಣೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹  $x$  ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಮೇಲೆ 24% ರಿಯಾಯಿತಿ ಹೊಂದಿದೆ.

ರೆಹಾನ ನೀಡಿದ ಹಣ =  $x - x$  ನಲ್ಲಿ 24%

$$x - x \text{ ನಲ್ಲಿ } 24\% = 380$$

$$\Rightarrow x - \frac{24}{100} \times x = 380$$

$$\Rightarrow \frac{100x - 24x}{100} = 380$$

$$\Rightarrow \frac{76x}{100} = 380$$

$$x = \frac{380 \times 100}{76}$$

$$\therefore x = 500$$

$$\therefore \text{ಗೌನಿನ ಪ್ರಕಟಣೆ ಬೆಲೆ} = ₹ 500$$



**ಉದಾಹರಣೆ 22:** ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ  $\frac{4}{5}$  ರಷ್ಟು, ಅದರ  $\frac{3}{4}$  ರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 4 ಹೆಚ್ಚು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ' $x$ ' ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\text{ಸಂಖ್ಯೆಗೆ } \frac{4}{5} \text{ ರಷ್ಟು} = \frac{4}{5}x$$

$$\text{ಸಂಖ್ಯೆಗೆ } \frac{3}{4} \text{ ರಷ್ಟು} = \frac{3}{4}x$$

ಹಾಗಾದರೆ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ  $\frac{4}{5}x$ ,  $\frac{3}{4}x$  ಗಿಂತ 4 ಹೆಚ್ಚು

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = 4$$

$$\frac{16x - 15x}{20} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 4 \Rightarrow x = 80$$

$$\therefore \text{ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ} = 80.$$



**ಉದಾಹರಣೆ 23:** ಜಾನ್ ತನ್ನ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ₹ 301 ರೂಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿ 14% ನಷ್ಟವೊಂದಿದ. ಹಾಗಾದರೆ ಜಾನ್ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಜಾನ್ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ₹  $x$  ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ

$$\text{ಇದರಿಂದಾದ ನಷ್ಟ} = 'x' \text{ ನಲ್ಲಿ } 14\% = \frac{14}{100} \times x = \frac{14x}{100}$$

ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ - ನಷ್ಟ

$$\Rightarrow 301 = x - \frac{14x}{100}$$

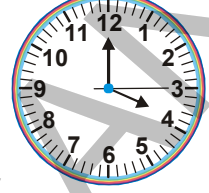
$$301 = \frac{100x - 14x}{100}$$

$$301 = \frac{86x}{100}$$

$$\frac{301 \times 100}{86} = x$$

$$350 = x$$

ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ₹ 350.



**ಉದಾಹರಣೆ 24:** ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ತಾನು ನಡೆಯ ಬೇಕಾದ ದೂರದಲ್ಲಿನ  $\frac{2}{3}$  ಭಾಗವನ್ನು 4 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಭಾಗವನ್ನು 4 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ.

ವೇಗದಿಂದ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು 5 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ವೇಗದಿಂದ ನಡೆದನು. ಅವನು ನಡೆದ ಒಟ್ಟು ಸಮಯ 42 ನಿಮಿಷಗಳಾದರೆ ಅವನು ನಡೆದ ಒಟ್ಟು ದೂರವೆಷ್ಟು.

**ಪರಿಹಾರ :** ಒಟ್ಟು ನಡೆದ ದೂರವನ್ನು ' $x$ ' ಕಿ.ಮೀ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.



	ಮೊದಲ ಭಾಗ	ಎರಡನೇ ಭಾಗ
ನಡೆದ ದೂರ	' $x$ ' ನಲ್ಲಿ $\frac{2}{3} = \frac{2x}{3}$	ಉಳಿದ ದೂರ = $x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$
ವೇಗ	4 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ.	5 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ.
ಕಾಲ	$\frac{\frac{2}{3}x}{4} = \frac{2x}{12}$ ಗಂಟೆ	$\frac{\frac{x}{3}}{5} = \frac{x}{15}$ ಗಂಟೆಗಳು.

$$\text{ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಒಟ್ಟು ಕಾಲ} = \frac{2x}{12} + \frac{x}{15} \text{ ಗಂಟೆಗಳು.}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x}{12} + \frac{x}{15}\right) \text{ಗಂಟೆಗಳು} = 42 \text{ ನಿಮಿಷಗಳು}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x}{12} + \frac{x}{15}\right) \text{ಗಂಟೆಗಳು} = \frac{42}{60} \text{ ನಿಮಿಷಗಳು}$$

$$\frac{2x}{12} + \frac{x}{15} = \frac{42}{60}$$

$$\frac{10x + 4x}{60} = \frac{42}{60}$$

$$\Rightarrow 14x = 42$$

$$\Rightarrow x = 3$$

ಒಟ್ಟು ದೂರ  $x = 3$  ಕಿ. ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ 25:** ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶ, ಭೇದಕ್ಕಿಂತ 6 ಕಡಿಮೆ. ಅಂಶಕ್ಕೆ 3 ಸೇರಿಸಿದರೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ  $\frac{2}{3}$  ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಭೇದ 'x' ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ =  $x - 6$

$$\therefore \text{ಭಿನ್ನರಾಶಿ} = \frac{x-6}{x}$$

ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ ಅಂಶಕ್ಕೆ 3 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅದು  $\frac{2}{3}$  ಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\Rightarrow \frac{x-6+3}{x} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x-3}{x} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x - 9 = 2x$$

$$x = 9$$

$$\therefore \text{ಭಿನ್ನರಾಶಿ} = \frac{x-6}{x} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$$

$$\therefore \text{ಭಿನ್ನರಾಶಿ} \frac{3}{9} .$$

**ಉದಾಹರಣೆ 26:** ಶಿರೀಷ ಬಳಿ 50 ಪೈಸೆಗಳು ಮತ್ತು 25 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ.

50 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟು 25 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 9 ಆದರೆ ಯಾವ ಯಾವ ವಿಧದ ನಾಣ್ಯಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ?



**ಪರಿಹಾರ :** 50 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $x$  ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

25 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $2x$  ಆಗುತ್ತದೆ.

$$50 \text{ ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯಗಳ ಬೆಲೆ} = x \times 50 \text{ ಪೈಸೆಗಳು} = ₹ \frac{50x}{100} = ₹ \frac{x}{2}$$

$$25 \text{ ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ} = 2x \times 25 \text{ ಪೈಸೆಗಳು} = 2x \times \frac{25}{100} \\ = ₹ 2x \times \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$$

$$\text{ಒಟ್ಟು ನಾಣ್ಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ} = ₹ \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$$

ಹಾಗಾದರೆ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ ಈ ಮೊತ್ತದ ಬೆಲೆ = ₹ 9

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 9$$

$$\frac{2x}{2} = 9$$

$$\therefore x = 9$$

50 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ =  $x = 9$

25 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ =  $2x = 2 \times 9 = 18$ .

**ಉದಾಹರಣೆ 27:** ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ತನ್ನ ಮೊಪೆಡ್‌ಮೇಲೆ 24 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಆತ ತನ್ನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪಡಿಸಿದ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 5 ನಿಮಿಷ ತಡವಾಗಿ ಸೇರಿದನು. ಆದರೆ 30 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 4 ನಿಮಿಷ ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಸೇರಿದನು. ಹಾಗಾದರೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪಡಿಸಿದ ಸ್ಥಾನ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸೇರಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳದ ದೂರ 'x' ಕಿ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$24 \text{ ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ ವೇಗದಿಂದ 'x' ಕಿ.ಮೀ ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯ} = \frac{x}{24} \text{ ಗಂ.}$$

$$30 \text{ ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ ವೇಗದಿಂದ 'x' ಕಿ.ಮೀ ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯ} = \frac{x}{30} \text{ ಗಂ.}$$

ಹಾಗದರೆ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ ಈ ಎರಡರ ಮಧ್ಯೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = 9 ನಿಮಿಷಗಳು =  $\frac{9}{60}$  ಗಂಟೆಗಳು

$$\therefore \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{9}{60}$$

$$\therefore \frac{5x - 4x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{60} \times 120 = 18$$

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪಡಿಸಿದ ಸ್ಥಳದ ದೂರ 18 ಕಿ.ಮೀ.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 2.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$(i) \frac{n}{5} - \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$$

$$(ii) \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 14$$

$$(iii) \frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{6} = 8$$

$$(iv) \frac{2p}{3} - \frac{p}{5} = 11\frac{2}{3}$$

$$(v) 9\frac{1}{4} = y - 1\frac{1}{3}$$

$$(vi) \frac{x}{2} - \frac{4}{5} + \frac{x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{1}{5}$$

$$(vii) \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

$$(viii) \frac{2x-3}{3x+2} = \frac{-2}{3}$$

$$(ix) \frac{8p-5}{7p+1} = \frac{-2}{4}$$

$$(x) \frac{7y+2}{5} = \frac{6y-5}{11}$$

$$(xi) \frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$$

$$(xii) \frac{3t+1}{16} - \frac{2t-3}{7} = \frac{t+3}{8} + \frac{3t-1}{14}$$

2. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 3ನೇ ಭಾಗವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ 5ನೇ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ 4 ಹೆಚ್ಚು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. 2 ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 36. ಒಂದನ್ನು ಎರಡನೆಯದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ 4 ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(ಸೂಚನೆ: ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 'x', ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ 'x - 36')
4. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಭೇದಕ್ಕಿಂತ 4 ಕಡಿಮೆ. ಅಂಶ ಭೇದಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು  $\frac{1}{2}$  ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಯಾವುದು?
5. ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10, 17, 26 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ 10 ಬರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.  
(ಸೂಚನೆ: ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = x, x + 1, x + 2, ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ  $\frac{x}{10} + \frac{x+1}{17} + \frac{x+2}{26} = 10$ )
6. 40 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ನೇ ಭಾಗವಾದರೆ ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?  
 $\frac{3}{5}$
7. 15 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮೇರಿಯ ವಯಸ್ಸು ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸಿನ 4 ರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆಕೆಯ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಅರವಿಂದನ ಬಳಿ ಯಲ್ಲಿರುವ ಕಿಡಿ ಬ್ಯಾಂಕ್ ನಲ್ಲಿ ರೂಪಾಯಿ ನಾಣ್ಯಗಳು, 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ರೂಪಾಯಿ ನಾಣ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3 ರಷ್ಟಿವೆ. ನಾಣ್ಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ ₹ 35 ಆದರೆ ಯಾವ ಯಾವ ವಿಧದ ನಾಣ್ಯಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ?
9. A ಮತ್ತು B ಸೇರಿ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಮಾಡಬಲ್ಲರು. 'A' ಒಬ್ಬನೇ ಈ ಕೆಲಸವನ್ನು 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ B ಒಬ್ಬನೇ ಈ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಎಷ್ಟು ದಿನ ಬೇಕು.
10. ಒಂದು ರೈಲು 40 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳವನ್ನು 11 ನಿಮಿಷ ತಡವಾಗಿ ಸೇರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ 50 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ 5 ನಿಮಿಷ ತಡವಾಗಿ ಸೇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ರೈಲು ಪ್ರಯಾಣಿಸಬೇಕಾದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಒಂದು ಜಿಂಕೆಯ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ  $\frac{1}{4}$  ಭಾಗ ಕಾಡಿಗೆ ಹೋಗಿವೆ. ಒಟ್ಟು ಜಿಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ  $\frac{1}{3}$  ಭಾಗ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿವೆ. ಉಳಿದ 15 ನದಿ ದಡದಲ್ಲಿನೀರು ಕುಡಿಯುತ್ತಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಜಿಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ಒಬ್ಬ ಅಂಗಡಿಯವನು ಒಂದು ರೇಡಿಯೋವನ್ನು ₹ 903 ಗೆ ಮಾರುವುದರಿಂದ 5% ಲಾಭ ಪಡೆದನು. ಹಾಗಾದರೆ ರೇಡಿಯೋ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
13. ಶೇಖರ್ ತನ್ನ ಬಳಿಯಿರುವ ಮಿಠಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಲುಭಾಗ ರೇಣುಗೆ, 5 ಮಿಠಾಯಿ ರಾಜಿಗೆ ನೀಡಿದನು. ಇನ್ನೂ ಆತನ ಬಳಿ 7 ಮಿಠಾಯಿಗಳು ಉಳಿದಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆತನ ಬಳಿ ಮೊದಲು ಇದ್ದ ಮಿಠಾಯಿಗಳೆಷ್ಟು?



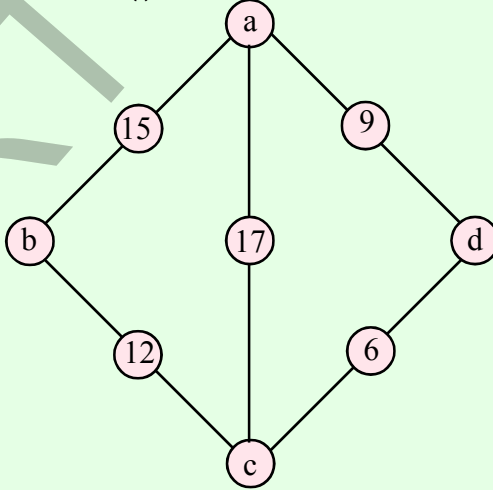
### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ ಒಂದು ಆದರೆ ಅಥವಾ ಒಂದನೇ ಘಾತ ಚರಾಕ್ಷರವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವರು.
2. ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದೇ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಅಥವಾ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವರು.
3. ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ  $L.H.S. = R.H.S.$  ಆಗುವುದೋ ಆ ಚರಾಕ್ಷರ ಬೆಲೆಯನ್ನೇ ಆ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎನ್ನುವರು.
4. ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಹಾಗೆಯೇ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಗೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸ ಬಹುದು.

### ಮ್ಯಾಜಿಕ್ ಡೈಮೆಂಡ್

ಡೈಮೆಂಡ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾಗುವಂತೆ ವ್ಯತ್ಯಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿ

ಸೂಚನೆ: ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು  $a = x$ ,  $b = 5 + x$ ,  $c = 3 + x$ ,  $d = 11 + x$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರಲಿ.



ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ  $x$  ಆದಾಗ ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ  $20 + 2x$  ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ  $x = 1$ , ಆದರೆ  $a = 1$ ,  $b = 6$ ,  $c = 4$ ,  $d = 12$  ಆಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನ ಅಂಕಿಯ ಮೊತ್ತ 22 ಆಗುತ್ತದೆ.

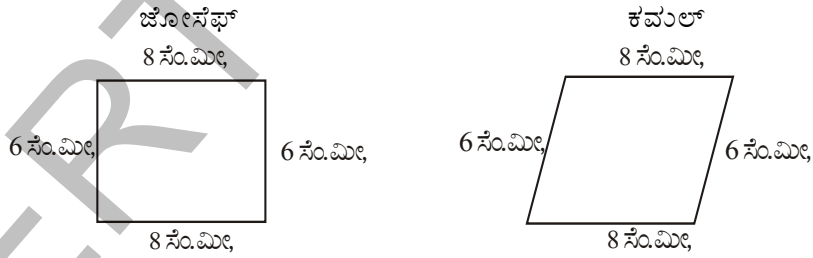
## ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳು

### 3.0 ಪೀಠಿಕೆ

ನಾವು ಹೊಲಗಳನ್ನು, ಮನೆಗಳನ್ನು, ಸೇತುವೆಗಳನ್ನು, ರೈಲು ಕಂಬಿಗಳನ್ನು, ಶಾಲೆಗಳನ್ನು ಆಟದ ಮೈದಾನ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಗಾಳಿಪಟಗಳನ್ನು, ಲುಡೋ ಆಟ, ಕ್ಯಾರಮ್ ಬೋರ್ಡ್, ಕಿಟಕಿಗಳನ್ನು ಕಪ್ಪು ಹಲಿಗೆ ಇನ್ನಿತರ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಚಿತ್ರ ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಅವು ಹೇಗೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತವೆ? ಇವುಗಳ ಮೂಲ ಆಕಾರಗಳು ನೋಡಲು ಹೇಗಿರುತ್ತವೆ? ಬಹಳಷ್ಟು ಆಕಾರಗಳು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಕಮಲ್ ಮತ್ತು ಜೋಸೆಫ್ ಉದ್ದ 8 ಸೆ.ಮೀ, ಅಗಲ 6 ಸೆ.ಮೀಗಳಿಂದ ಚಿತ್ರ ಬಿಡಿಸಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಸ್ವಂತವಾಗಿ ಒಬ್ಬರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೊಬ್ಬರು ನೋಡದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಚಿತ್ರಿಸಿದ್ದಾರೆ.



ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇವಿಧವಾಗಿವೆಯಾ?

ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆ ಇರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೇ ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಆಕಾರಗಳು ಒಂದೇಯಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು. 7ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ತ್ರಿಭುಜ ವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ಅಳತೆಗಳು ಬೇಕು. ಅವು ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಅಥವಾ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋನ, ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಒಂದು ಬಾಹು ಇತ್ಯಾದಿ. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಸ್ವತಂತ್ರ ಅಳತೆಗಳು ಬೇಕು? ಒಂದು ಏಕೈಕ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದರೆ ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಿದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು.

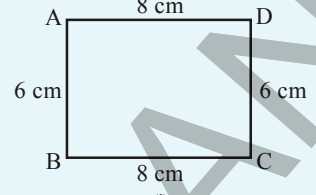


ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

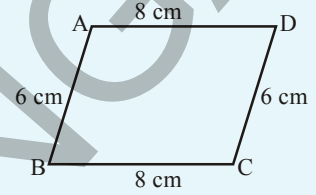
ಉದ್ದ 8 ಸೆ.ಮೀ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಕೋಲುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಉದ್ದ 8 ಸೆ.ಮೀ ಇರಲಿ. 6 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಕೋಲುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಯತಾಕಾರ ಬರುವಂತೆ ಉದ್ದ 8 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅಗಲ 6 ಸೆ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಈ ಆಯತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ 4 ಅಳತೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆಯತದ ಅಗಲವನ್ನು ಓರೆಯಾಗಿ ಬರುವಂತೆ ತಳ್ಳಿರಿ. ಇದು ಈಗ ಆಯತವೇ? ನಿಮಗೆ ಒಂದು ಹೊಸ ಆಕಾರ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ ಆಯತವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆ ಹೊಂದಿದೆ. ನಿವೇನಾದರೂ ಕೋಲುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಇಲ್ಲ! ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾಗಿಲ್ಲ. ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕದಲಿಸಿರಿ. ನಿಮಗೆ ಏನು ಕಾಣುತ್ತದೆ? ಈಗ ಕೂಡ ಒಂದು ಹೊಸ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಆಕಾರ ಮೊದಲಿನ ಆಕಾರದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ (iii) ಅದರೂ ಕೂಡ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ ನಿಮಗೆ 4 ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ಈಗ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಸ್ವತಂತ್ರ ಅಳತೆಗಳು ಬೇಕು? ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಕೃತ್ಯಕ್ಕೆ ಹೋಗೋಣ!

ನೀವು 8 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದ ಇರುವ ಎರಡು ಕೋಲುಗಳು ಮತ್ತು 6 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದ ಇರುವ ಇನ್ನೆರಡು ಕೋಲುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೀರಿ ಅಲ್ಲವೇ. ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು BD ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಲನ್ನು BD ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ. (ಚಿತ್ರ iv) ಈಗ ನೀವು ಆಗಲದ ಕಡೆಯಿಂದ ತಳ್ಳಿದರೆ ಆಕಾರ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯಾ? ಇಲ್ಲ! ಅದು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಐದನೇ ಕೋಲನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಆಕಾರವನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಅದು ಹೇಗೆಂದರೆ ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾರೆವು.

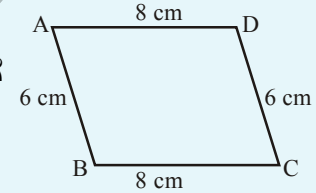
(ಇದೇ ಅಳತೆಗಳಿಂದ) ಇದರಿಂದ ನಾವು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಲು 5 ಸ್ವತಂತ್ರ ಅಳತೆಗಳು ಬೇಕೆಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಯಾವುದಾದರೂ 5 ಅಳತೆಗಳು (ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು) ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಲು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆಯೇ?



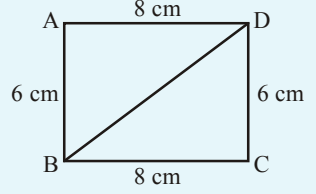
(i)



(ii)



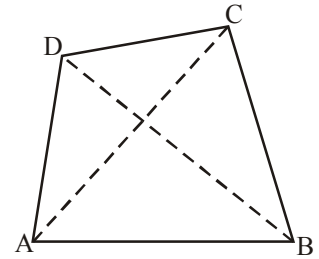
(iii)



(iv)

3.1 ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. ಅದರ ಶೃಂಗಗಳು A, B, C, D ಗಳು ಅದರ ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳು  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  ಮತ್ತು  $\overline{DA}$  ಗಳು ಬಾಹುಗಳು.  $\angle ABC$ ,  $\angle BCD$ ,  $\angle CDA$  ಮತ್ತು  $\angle DAB$  ಗಳು ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ .







### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

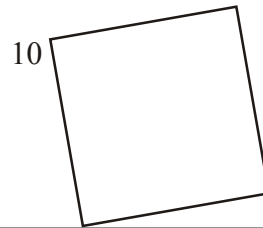
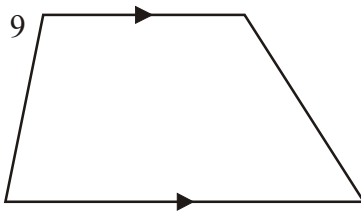
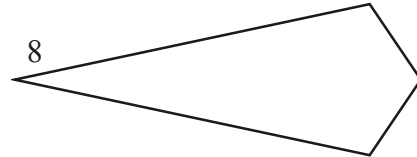
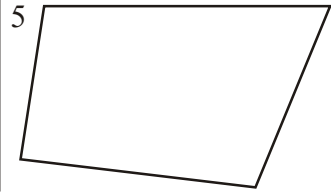
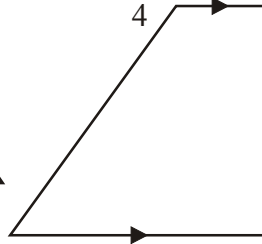
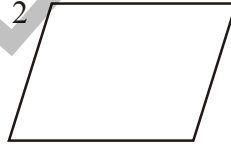
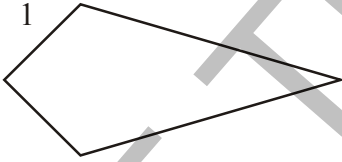
ಬೇಕಾದ ಸಾಮಗ್ರಿ : ಒಂದು ಸ್ಕೇಲು, ಮುಮ್ಮೂಲೆ ಪಟ್ಟಿಗಳು, ಮತ್ತು ಕೋನ ಮಾಪಕ.

ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವವು : ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳೋ ಅಲ್ಲವೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ಮುಮ್ಮೂಲೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮೊದಲ ರೇಖೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸರಿಸಿ.

ಈಗ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಪರಿಕರವು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ಪರಿಶೋಧಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ

- ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ನೋಡಬೇಕು
- ಪ್ರತಿಕೋನದ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.
- ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.



ನೀವು ಪರಿಶೋಧಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೋದಿಸಿ

ಚತುರ್ಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆ	ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳು	ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳು	ನಾಲ್ಕು ಲಂಬ ಕೋನಗಳು	ಎರಡು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ	ಎರಡು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ	ಎರಡು ಜೊತೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಕೋನಗಳು ಸಮ	ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸಮ
1	x	x	x	x	x	✓	x
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳಿರುತ್ತವೆ.

- ಯಾವ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು?
- ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಇತರ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೇನು?

ಆಯತಗಳು ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಕೋನಗಳು ಹೊಂದಿದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು.

- ಯಾವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಆಯತಗಳು?
- ಆಯತ ಆಕೃತಿಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೇನು?

ವಜ್ರಾಕೃತಿ ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಬಾಹುಗಳು ಹೊಂದಿದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು.

- ಯಾವ ಆಕೃತಿಗಳು ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳೆನ್ನಬಹುದು?
- ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೇನು?

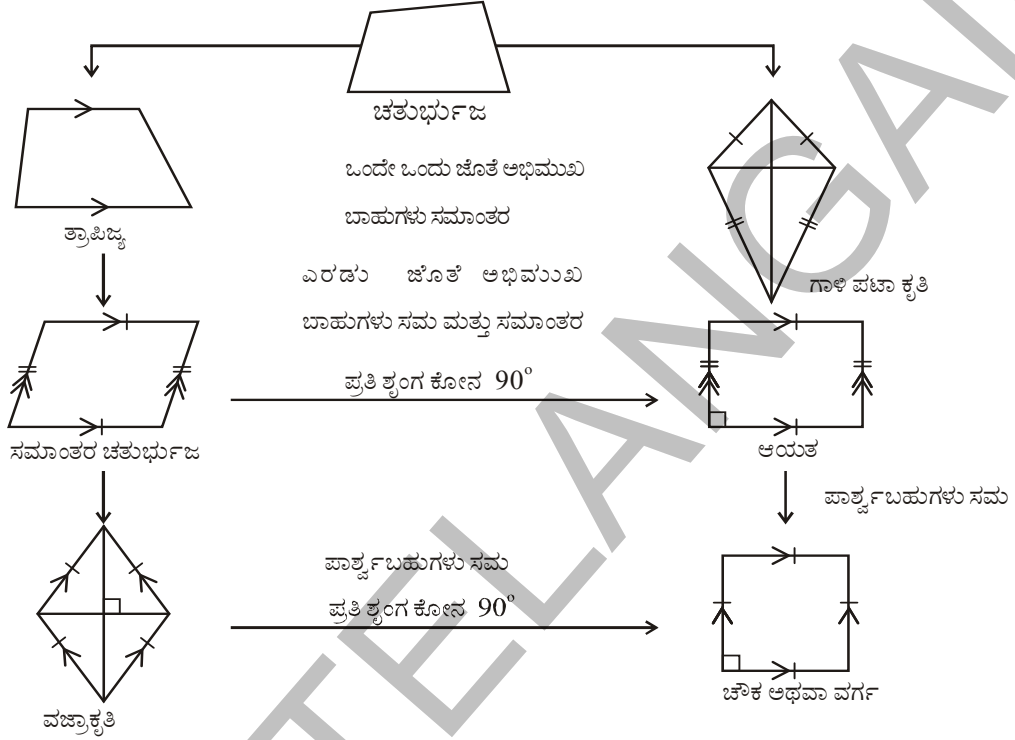
ಚೌಕ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬ ಕೋನಗಳು ಹೊಂದಿದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳು.

- ಯಾವ ಆಕೃತಿಗಳು ಚೌಕಾಕಾರದಲ್ಲಿವೆ?
- ಚೌಕಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೇನು?

ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅಭಿಮುಖಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳು ಹೊಂದಿದ ಚತುರ್ಭುಜ

- ಯಾವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳೆಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಕರೆಯಬಹುದು?
- ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಇತರ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೇನು?

1 ನೇ, 8 ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಗಾಳಿಪಟಾಕೃತಿಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಗಾಳಿಪಟಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ನೀವು ಪರಿಶೋಧಿಸಿದ ವಿವಿಧ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು.



ಆಲೋಚಿಸಿರಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :



1. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಯತವು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೇ? ಪ್ರತಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಒಂದು ಆಯತವೇ?
2. ಉಮ ಒಂದು ಸಿಹಿ ತಿಂಡಿ (ಚೆಕ್ಲಿ, ಭರ್ಪಿ) ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ. ಅದು ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿಯೇ ಆಕಾರ ಇರಬೇಕೆಂದರೆ ಆಕೆ ಅದನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಆಕಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬರಬೇಕು.



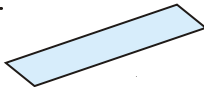
ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ನೀವು  $60^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲರಾ?

ಇದು ಬಳಸಬಹುದು

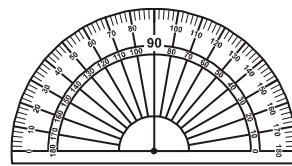


ಕೈವಾರ



ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿ

ಇದು ಬಳಸಬಾರದು



ಕೋನಮಾಪಕ

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಅವುಗಳ ರಚನಾ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

(i)

(a) (b) (c) (d) (e)

(ii)

$\angle ABC = 120^\circ$   $\angle EFG = 30^\circ$

(iii)

(iv)

$\angle PSR = 90^\circ$   $\angle QST = 45^\circ$

### 3.2 ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳು

ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

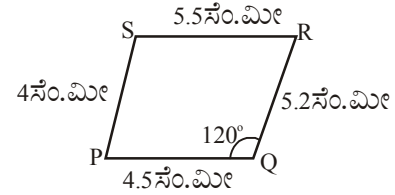
1. ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಕೋ).
2. ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಕರ್ಣ).
3. ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಕರ್ಣ.ಕರ್ಣ).
4. ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ.ಕೋ.)
5. ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋನಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.)

**3.2.1 ರಚನೆ :** ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಕೋ.)

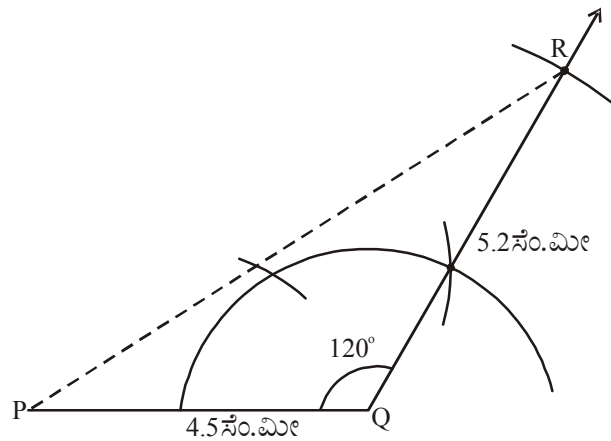
**ಉದಾ 1 :**  $PQ = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ.  $QR = 5.2$  ಸೆ.ಮೀ.,  $RS = 5.5$  ಸೆ.ಮೀ.,  $PS = 4$  ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು  $\angle PQR = 120^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**

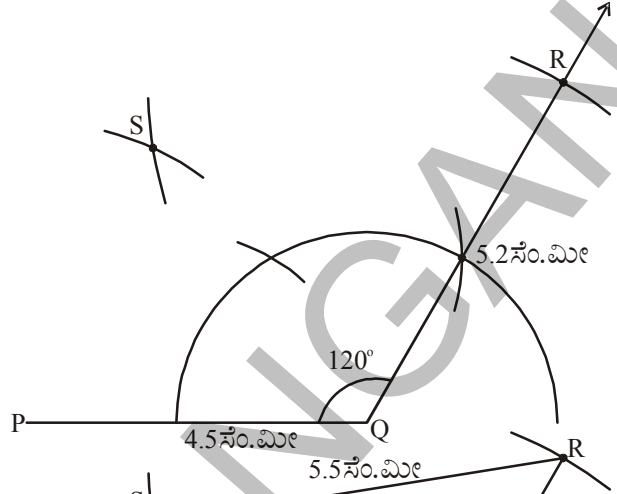
**ಹಂತ 1 :** ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಒಂದು ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಅಳತೆಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆಯೇ?



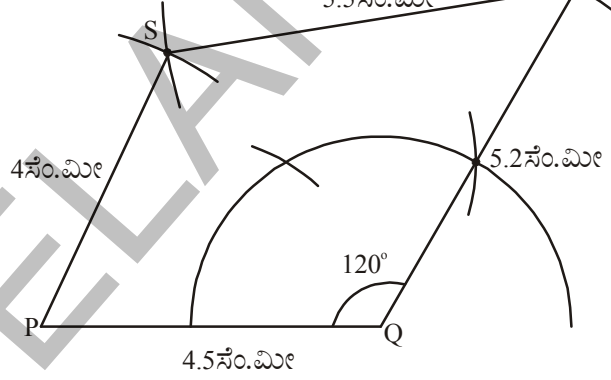
**ಹಂತ 2 :**  $\triangle PQR$  ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ  $\triangle PQR$  ರಚಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕೆ  $PQ = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle PQR = 120^\circ$  ಮತ್ತು  $QR = 5.2$  ಸೆ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.



ಹಂತ 3 : ನಾಲ್ಕನೇ ಶೃಂಗ 'S'ನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲು P ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 4 ಸೆಂ.ಮೀ (PS = 4 ಸೆಂ.ಮೀ) ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ (RS = 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ) ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಕಂಸವನ್ನು 'S'ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



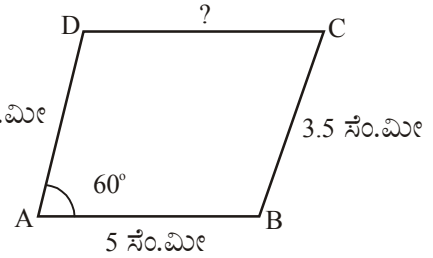
ಹಂತ 4 : P, S ಮತ್ತು R, S ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಪೂರ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.



ಉದಾ 2 : AB = 5 , BC = 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು  $\angle A = 60^\circ$ . ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

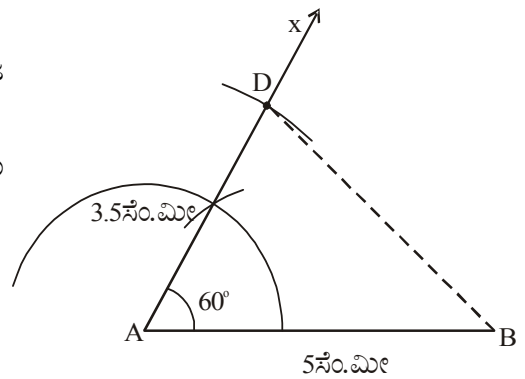
ಹಂತ 1 : ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಒಂದು ಕುಚ್ಚಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಚತುರ್ಭುಜ) ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.



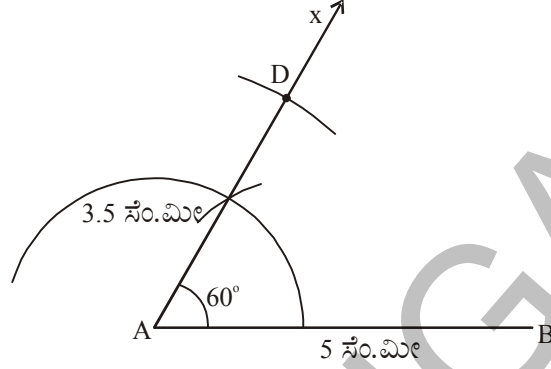
ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು  $CD = AB = 5$  ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು  $AD = BC = 3.5$  ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. (ಹೇಗೆ?)

(ಈಗ ನಮಗೆ ಒಟ್ಟು ಐದು ಅಳತೆಗಳು ಬಂದಿವೆ)

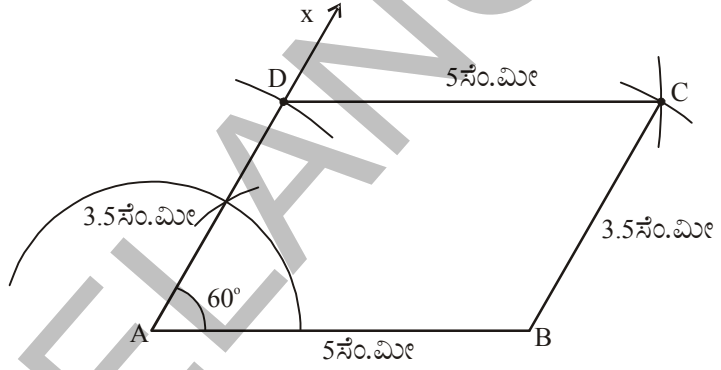
ಹಂತ 2: AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ  $\angle A = 60^\circ$  ಮತ್ತು AD = 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ  $\triangle BAD$  ರಚಿಸಿರಿ



ಹಂತ 3: ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳು  
 $BC=3.5$  ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು  $DC$   
 $= 5$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ 'C'  
 ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಹಂತ 4: B, C ಮತ್ತು C, D ಗಳನ್ನು  
 ಸೇರಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ  
 ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ  
 ABCD ಬರುತ್ತದೆ.



( ಸ್ವೇಲು ಮತ್ತು ಕೋನಮಾಪಕದ  
 ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ  
 ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.)

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಈಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧಾರಣೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಹಂತ 1: ಬೇಕಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 2: ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳು ರಚನೆಗೆ ಕಡಿಮೆ ಎನಿಸಿದರೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ, ರಚನೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಚತುರ್ಭುಜದ  
 ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಹಂತ 3: ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಐದು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ರಚನೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿ. ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು  
 ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾಲ್ಕನೇ ಶೃಂಗವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 4: ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು..



### ಅಭ್ಯಾಸ - 3.1

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ರಚನೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(a)  $AB = 5.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $BC = 3.5$  ಸೆ.ಮೀ  $CD = 4$  ಸೆ.ಮೀ,  $AD = 5$  ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು  $\angle A = 45$   
 ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(b)  $BE = 2.9$  ಸೆ.ಮೀ,  $ES = 3.2$  ಸೆ.ಮೀ,  $ST = 2.7$  ಸೆ.ಮೀ,  $BT = 3.4$  ಸೆ.ಮೀ,  
 ಮತ್ತು  $\angle B = 75^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ BEST ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(c)  $PQ = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $QR = 3$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $\angle PQR = 60^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ PQRS ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು  
 ರಚಿಸಿರಿ.

- (d)  $AT = 4$  ಸಂ.ಮೀ,  $\angle MAT = 120^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ MATH ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- (e)  $FL = 5$  ಸಂ.ಮೀ,  $LA = 3$  ಸಂ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ FLAT ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- (f)  $LU = 4.5$  ಸಂ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ LUDO ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

**3.2.2 ರಚನೆ :** ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಕರ್ಣ)

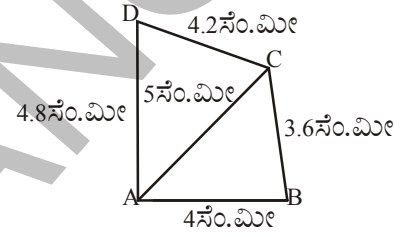
ಉದಾ **3 :**  $AB = 4$  ಸಂ.ಮೀ,  $BC = 3.6$  ಸಂ.ಮೀ,  $CD = 4.2$  ಸಂ.ಮೀ,  $AD = 4.8$  ಸಂ.ಮೀ ಮತ್ತು

$AC = 5$  ಸಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

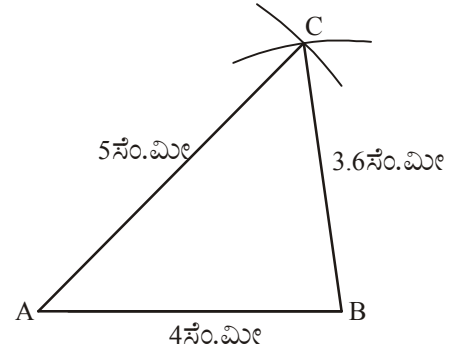
ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1: ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ..

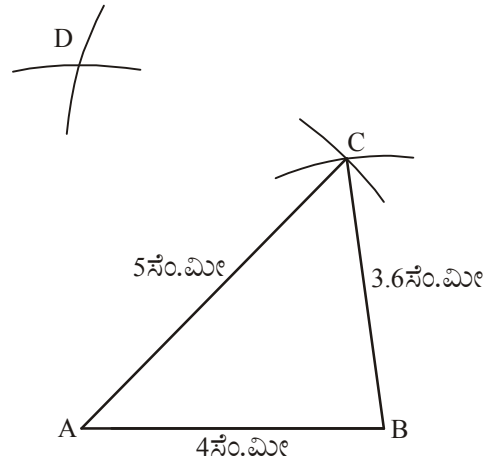
(ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳು ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಲು ಸರಿಹೋಗುತ್ತಾ ಇಲ್ಲವೇ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ. ಸರಿಹೋದರೆ ರಚನೆ ಮೊದಲು ಮಾಡಿ, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಇರುವ ಸಮಾಚಾರ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲಗುರ್ತಿಸಿ, ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಮತ್ತು ರಚಿಸಬೇಕಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಆಧಾರವಾಗಿ ಉಳಿದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ)



ಹಂತ 2:  $AB = 4$  ಸಂ.ಮೀ,  $BC = 3.6$  ಸಂ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $AC = 5$  ಸಂ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ  $\triangle ABC$  ಅನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

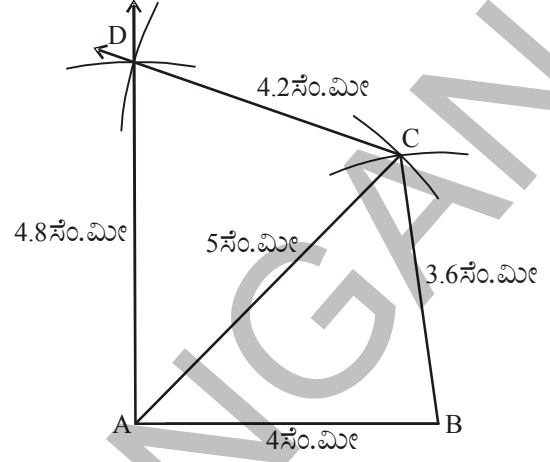


ಹಂತ 3: ನಾವು ಶೃಂಗ 'D' ಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು. ಇದು ತ್ರಿಭುಜದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ ಎಂದರೆ AC ಕಡೆ ಇರುತ್ತದೆ A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯ 4.8 ಸಂ.ಮೀ ( $AD = 4.8$  ಸಂ.ಮೀ) ಅಳತೆಯಿಂದ 'ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು 'C' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯ 4.2 ಸಂ.ಮೀ ( $CD = 4.2$  ಸಂ.ಮೀ) ಅಳತೆಯಿಂದ 'D' ಹತ್ತಿರ ಮತ್ತೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಕಂಸವನ್ನು 'D' ಯಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಲಿ.





ಹಂತ 4: A, D ಮತ್ತು C, D ಗಳು ಸೇರಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

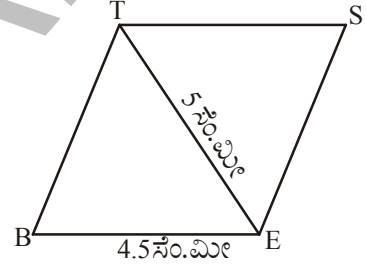


ಉದಾ 4:  $BE = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು  $ET = 5$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ BEST ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

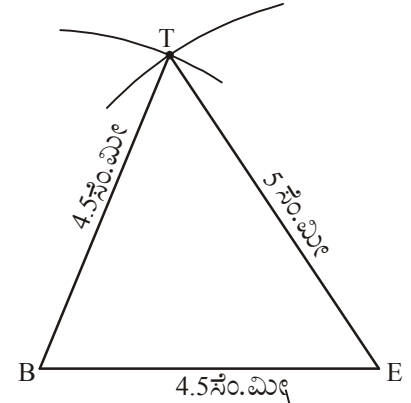
ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1 : ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಚತುರ್ಭುಜ ವೆಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ) ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನ ಆದ್ದರಿಂದ  $BE = ES = ST = BT = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

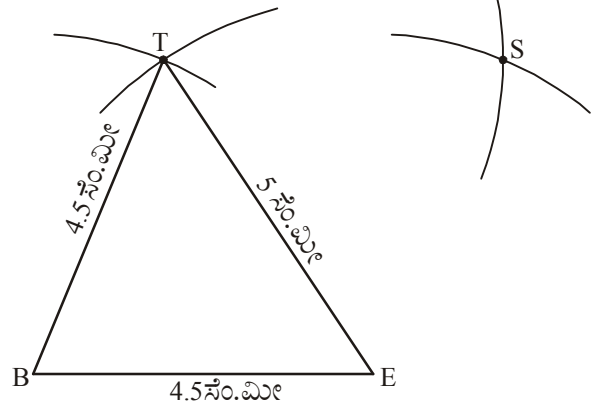
ಈಗ, ಈ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ನಾವು ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



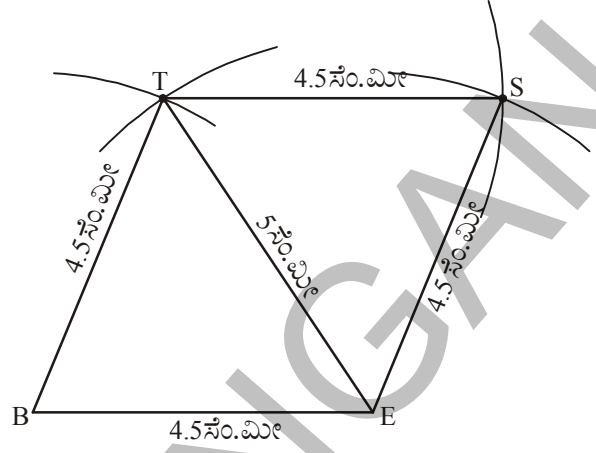
ಹಂತ 2 : ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಆಧಾರವಾಗಿ  $BE = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $ET = 5$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $BT = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ  $\triangle BET$  ನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.



ಹಂತ 3 : ನಾಲ್ಕನೇ ಶೃಂಗವನ್ನು S ಅನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು, ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳಾದ  $ES = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $ST = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ, ಗಳಿಂದ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು S ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಲಿ



ಹಂತ 4 : E, S ಮತ್ತು S, T ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ BEST ಒಂದು ದತ್ತ ವಜ್ರಾಕೃತಿ.



ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ:

1.  $BA = 5$  ಸೆ.ಮೀ,  $AT = 6$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $AS = 6.5$  ಸೆ.ಮೀ? ಅಳತೆಗಳಿಂದ ನೀವು ಒಂದು BATS ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲೀರಾ ವಿವರಿಸಿರಿ?
2. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ  $PL = 3$  ಸೆ.ಮೀ,  $LA = 4$  ಸೆ.ಮೀ,  $AY = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $PY = 2$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $LY = 6$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ PLAY ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೆ ಅವನಿಗೆ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಲ್ಲ ಏಕೆ? ಈ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ನೀವು ಸಹ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ



### ಅಭ್ಯಾಸ - 3.2

ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:

- (a)  $AB = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $BC = 5.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $CD = 4$  ಸೆ.ಮೀ,  $AD = 6$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $AC = 7$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- (b)  $PQ = 3.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $QR = 4$  ಸೆ.ಮೀ,  $RS = 5$  ಸೆ.ಮೀ,  $PS = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $QS = 6.5$  ಸೆ.ಮೀ PQRS ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ
- (c)  $AB = 6$  ಸೆ.ಮೀ,  $CD = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $BD = 7.5$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- (d)  $NI = 4$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $IE = 5.6$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ NICE ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

**3.3.3 ರಚನೆ :** ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಕರ್ಣ.ಕರ್ಣ)

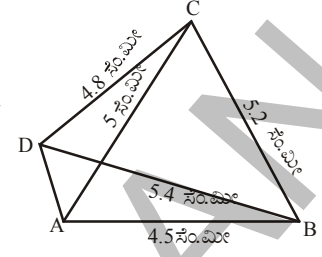
ಉದಾ 5 :  $AB = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $BC = 5.2$  ಸೆ.ಮೀ,  $CD = 4.8$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು  $AC = 5$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $BD = 5.4$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

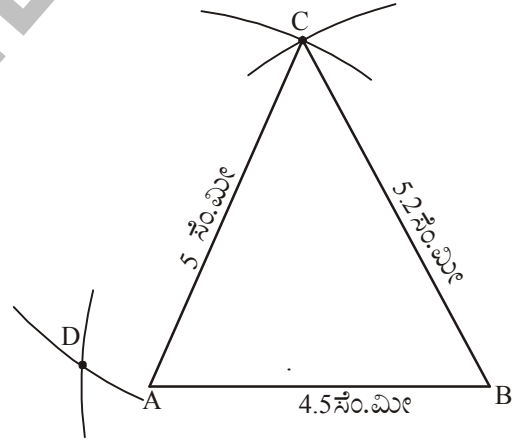
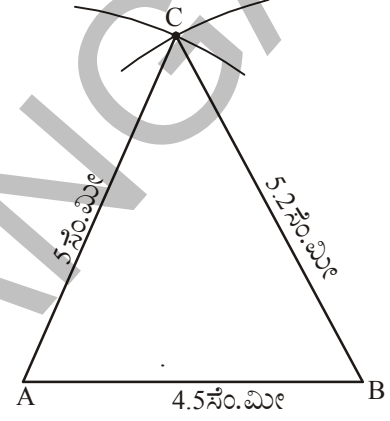
ಹಂತ 1: ಮೊದಲು ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೆಟ್ಟಾಚಿತ್ರ ಬರೆದು ಅದರಲ್ಲಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

( $\Delta ABC$  ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದು)

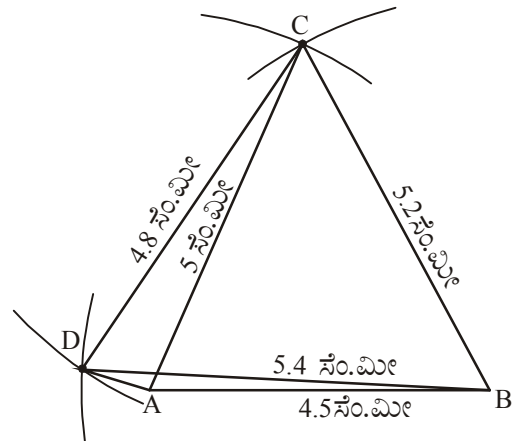
ಹಂತ 2: ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಸಿದ್ಧಾಂತ (SSS) ಆಧಾರವಾಗಿ  $AB = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ  
 $BC = 5.2$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $AC = 5$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ  
 $\Delta ABC$  ರಚಿಸಿರಿ.



ಹಂತ 3: B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 5.4 ಸೆ.ಮೀ , ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. C ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 4.8 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆದು. B ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ D ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.



ಹಂತ 4: C,D, B,D ಮತ್ತು A,D ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಅನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.



ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :



1. ನೀವು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು ಮೊದಲು  $\triangle ABD$  ಮೊದಲು ಮಾಡಿ ನಂತರ ಶೃಂಗ 'C' ಅನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ರಚಿಸಬಲ್ಲೀರಾ? ಕಾರಣ ತಿಳಿಸಿರಿ.
2. PQRS ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು  $PQ = 3$  ಸೆ.ಮೀ,  $RS = 3$  ಸೆ.ಮೀ,  $PS = 7.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $PR = 8$  ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು  $SQ = 4$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಲ್ಲೀರಾ, ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಿರ್ದರಿಸಿರಿ.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 3.3

ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:-

- (a)  $OL = 7.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $GL = 6$  ಸೆ.ಮೀ,  $LD = 5$  ಸೆ.ಮೀ,  $DG = 5.5$  ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು  $OD = 10$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ GOLD ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- (b)  $PQ = 4.2$  ಸೆ.ಮೀ,  $QR = 3$  ಸೆ.ಮೀ,  $PS = 2.8$  ಸೆ.ಮೀ,  $PR = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $QS = 5$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ PQRS ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

**3.3.4 ರಚನೆ :** ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ.ಕೋ) ನಾವು ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಬೇಕಾದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಕೋನಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವೇಲು ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನೂ ಉಳಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ **6 :**  $PQ = 4$  ಸೆ.ಮೀ,  $QR = 4.8$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle P = 75^\circ$ ,  $\angle Q = 100^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle R = 120^\circ$ . ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ PQRS ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

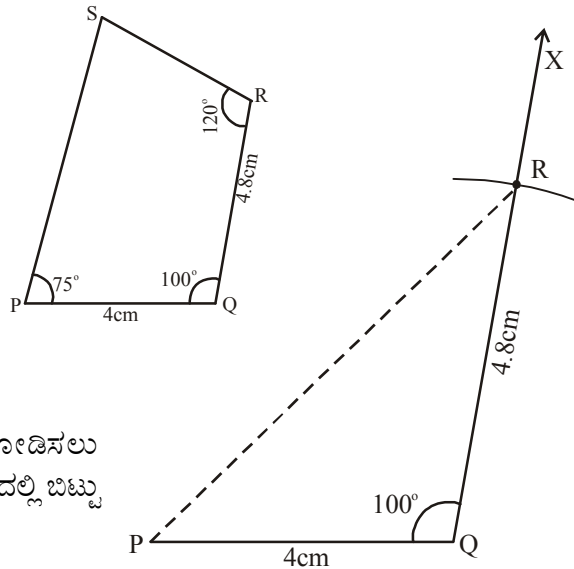
ಯಾವ ಕೋನಗಳು  $360^\circ$  ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆ ಎಂದರೆ  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  ಮತ್ತು  $180^\circ$  ಬಂದರೆ ಅಂತಹ ಕೋನಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳೆನ್ನುವೆವು.

ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ **1 :** ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕುಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆದು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಸೂಕ್ತ ಸಲಕರಣೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಹಂತ **2 :** ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ ಆಧಾರವಾಗಿ  $PQ = 4$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle Q = 100^\circ$  ಮತ್ತು  $QR = 4.8$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ  $\triangle PQR$  ನ್ನು ರಚಿಸಿ.

(ಇಲ್ಲಿ ಏಕೆ ಚುಕ್ಕೆ ಗೆರೆಗಳಿಂದ PR ನ್ನು ಜೋಡಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ? ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡಬಹುದು).



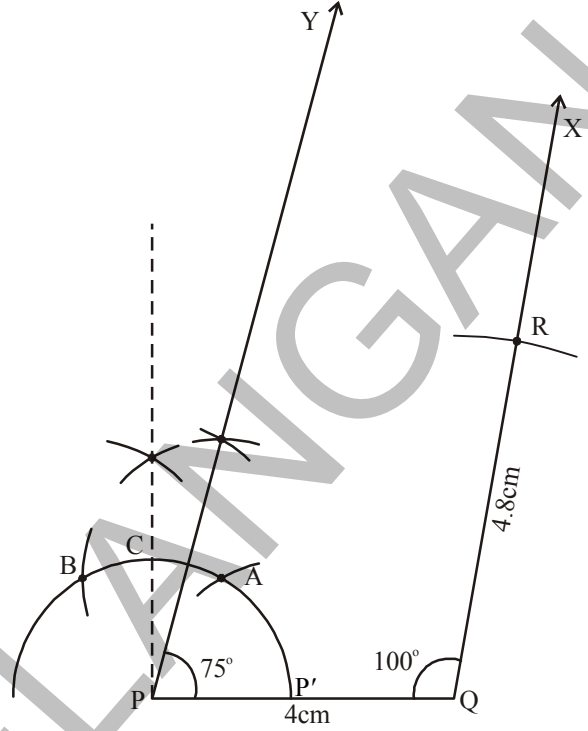
ಹಂತ 3:  $\angle P = 75^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ  $\overline{PY}$  ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

[ $75^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

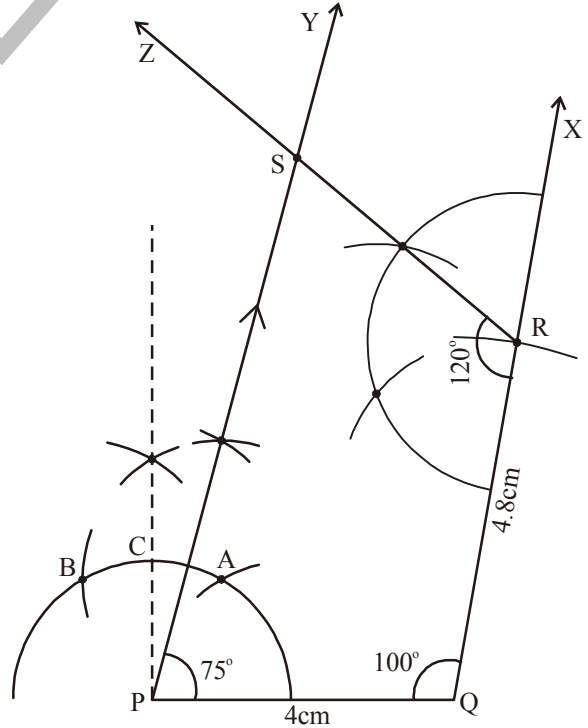
(a) P ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು PQನ್ನು P' ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. P' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಅದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಎರಡು ಕಂಸಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ A, B ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ  $60^\circ$  ಮತ್ತು  $120^\circ$  ಕೋನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ.

(b) A, Bಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು ಮೊದಲನೆ ಕಂಸವನ್ನು C ಹತ್ತಿರ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ  $90^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

(c) A, C ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಮತ್ತೆ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ( $60^\circ$  ಮತ್ತು  $90^\circ$  ಗಳ ನಡುವೆ) ಅದು  $75^\circ$  ಕೋನ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ ರೇಖೆ  $\overline{PY}$  ಬರುತ್ತದೆ]



ಹಂತ 4:  $\angle R = 120^\circ$  ರಚಿಸಿ.  $\overline{RZ}$  ಮುಂದು ಎಳೆದ ಕೋನರೇಖೆ  $\overline{PY}$  ನ್ನು ರೇಖೆ S ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಚತುರ್ಭುಜ PQRS ಬರುತ್ತದೆ.



ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :

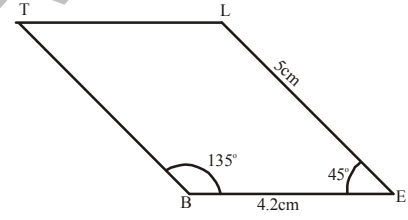


1. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ  $P = 75^\circ$  ಗೆ ಬದಲು  $P = 100^\circ$  ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ PQRS ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಬಲ್ಲದಾ? ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.
2. ನೀವು ಚತುರ್ಭುಜ PLAN ನ್ನು  $PL = 6$  ಸೆ.ಮೀ,  $LA = 9.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle P = 75^\circ$ ,  $\angle L = 15^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle A = 140^\circ$  ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ರಚಿಸಬಲ್ಲದಾ? (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಸಮಾಧಾನಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. )

ಉದಾ 7 :  $BE = 4.2$  ಸೆ.ಮೀ,  $EL = 5$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle T = 45^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ BELT ನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ :

ಹಂತ 1: ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ BELT ಗೆ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. (ಈ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಲು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆಯೇ?)



ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ :

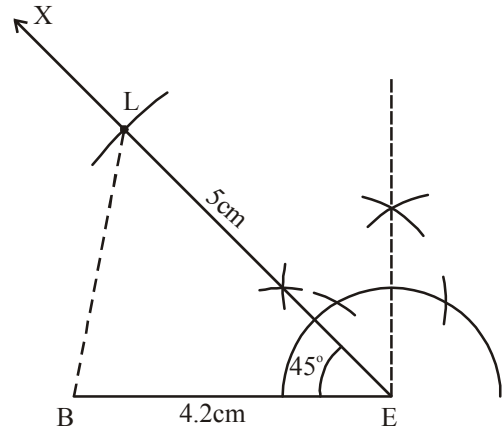
ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳು ನಮಗೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಬೇಕಾದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮ ವಾಗಿರುವುದರಿಂದ  $\angle E = \angle T = 45^\circ$  ಆಗುತ್ತದೆ.

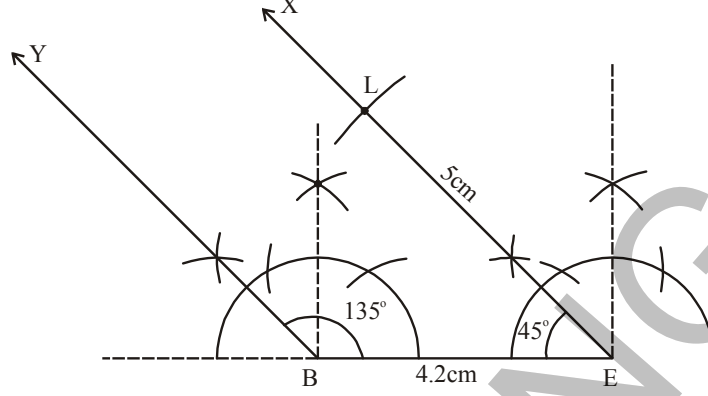
ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ “ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳು” ಆಗ  $\angle L = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

ಆದ್ದರಿಂದ  $\angle B = \angle L = 135^\circ$  ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2 : ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ  $BE = 4.2$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle E = 45^\circ$  ಮತ್ತು  $EL = 5$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ  $\triangle BEL$  ರಚಿಸಿರಿ.

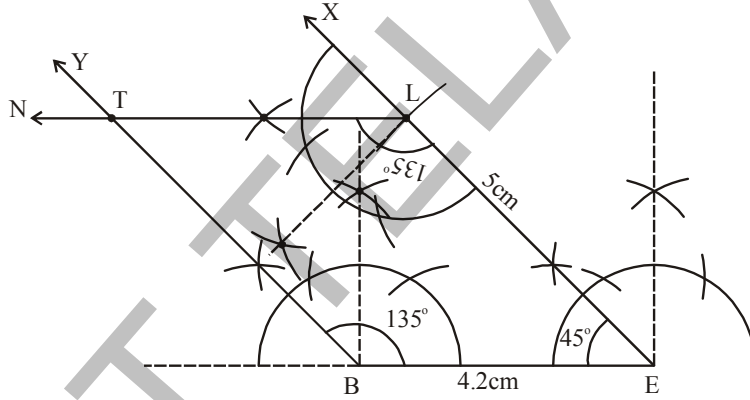


ಹಂತ 3 :  $\angle B = 135^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು  $\overline{BY}$  ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಹಂತ 4 :  $\angle L = 135^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು  $\overline{LN}$  ರೇಖೆ  $\overline{BY}$  ರೇಖೆಯನ್ನು T ಹತ್ತಿರ ಭೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

BELT ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಚತುರ್ಭುಜ (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ)



ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಮೇಲಿನ BELT ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು, ಮತ್ತೆ ಯಾವ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಇತರ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದೋ ತಿಳಿಸಿ, ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 3.4

ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಿರಿ.

- $HE = 6$  ಸೆ.ಮೀ,  $EL = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle H = 60^\circ$ ,  $\angle E = 105^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle P = 120^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ HELP ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- $GR = AM = 5$  ಸೆ.ಮೀ,  $RA = MG = 6.2$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $\angle R = 85^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ GRAM ಅನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- ಬಾಹುಗಳು  $FL = 6$  ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  $LA = 4.2$  ಸೆ.ಮೀ, ಅಳತೆಗಳಿಂದ FLAG ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

**3.2.5 ರಚನೆ :-** ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ)

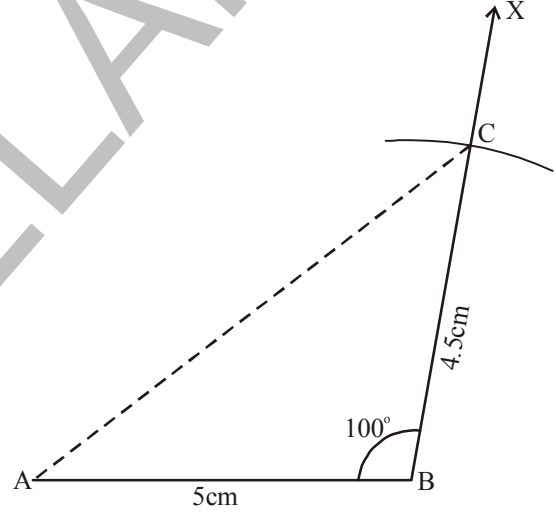
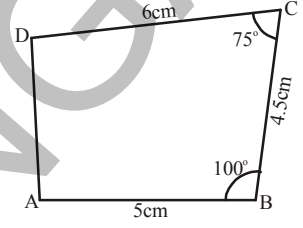
ಇಂತಹ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಮೊದಲು ನಾವು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ) ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಧಾನವಾಗಿ ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

**ಉದಾ 8 :**  $AB = 5$  ಸೆ.ಮೀ,  $BC = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ,  $CD = 6$  ಸೆ.ಮೀ,  $\angle B = 100^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle C = 75^\circ$ . ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

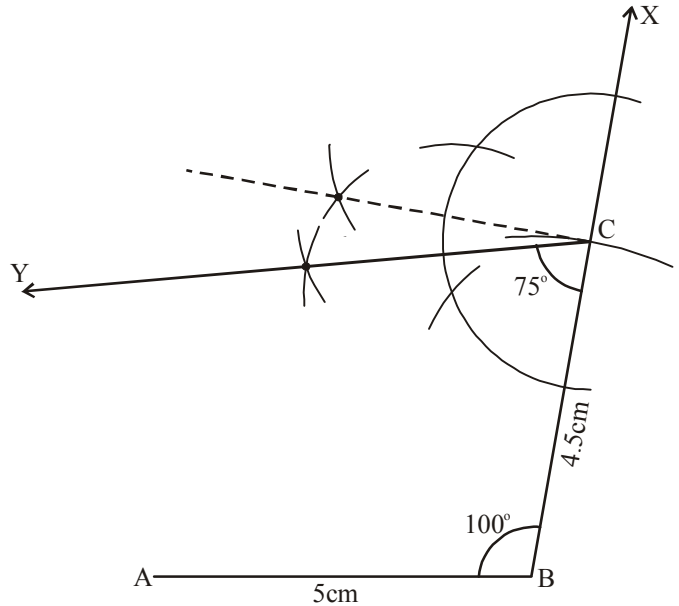
ಪರಿಹಾರ :

**ಹಂತ 1 :** ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಹಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಸಾಗಿರಿ).

**ಹಂತ 2 :**  $\triangle ABC$  ಯನ್ನು  $AB = 5$  ಮತ್ತು  $\angle B = 100^\circ$  ಮತ್ತು  $BC = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. (SAS) ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಿರಿ.

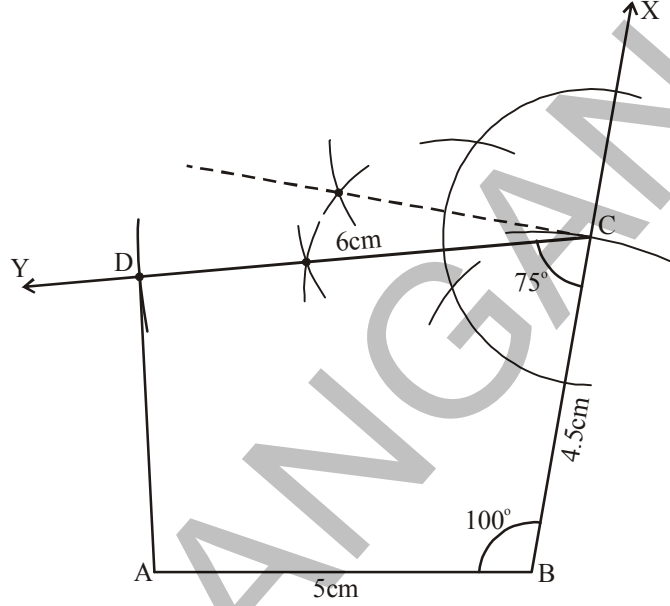


**ಹಂತ 3 :**  $\angle C = 75^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು  $\overline{CY}$  ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.





ಹಂತ 4 : 'C' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 6 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು  $\overline{CY}$  ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದು D ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. A, D ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ABCD ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಚತುರ್ಭುಜ ಬರುತ್ತದೆ.



ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :



ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು AB ಪಾದದ ಬದಲು BC ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸಬಲ್ಲೆವೋ? ಹಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕಚ್ಚಾಚಿತ್ರ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ರಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಕರವಾದ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 3.5

ಈ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

- $PQ = 3.6$  ಸೆ.ಮೀ.,  $QR = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ.,  $RS = 5.6$  ಸೆ.ಮೀ.,  $\angle PQR = 135^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle QRS = 60^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ PQRS ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- $AM = MP = PL = 5$  ಸೆ.ಮೀ.,  $\angle M = 90^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle P = 60^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ LAMP ಅನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ..
- $AB \parallel CD$ ,  $AB = 8$  ಸೆ.ಮೀ.,  $BC = 6$  ಸೆ.ಮೀ.,  $CD = 4$  ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು  $\angle B = 60^\circ$  ಅಳತೆಗಳಿಂದ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಅನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

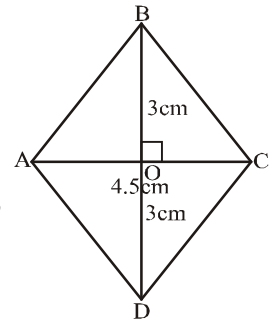
### 3.2.6 ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆ :

(ಅ) ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ರಚನೆ :

ಉದಾ 9 : ಕರ್ಣಗಳು  $AC = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು  $BD = 6$  ಸೆ.ಮೀ. ಕೊಟ್ಟಾಗ ವಜ್ರಾಕೃತಿ ABCD ರಚಿಸಿರಿ..

ಪರಿಹಾರ :

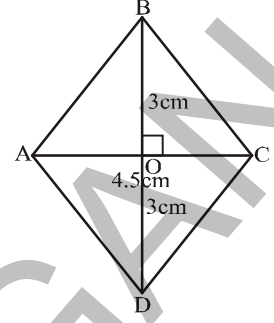
ಹಂತ 1 : ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕಚ್ಚಾಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಬೇಕಾದ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಲು ಈ ಅಳತೆಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆಯೇ ? ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕೆ, ನಾವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಬೇಕು.



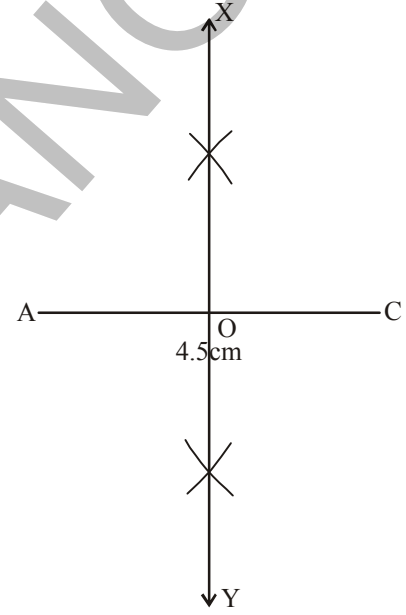
ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ : ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.  $\overline{AC}$  ಮತ್ತು  $\overline{BD}$  ಗಳು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ABCDಯ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು, ಅವು 'O' ಹತ್ತಿರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ  $\angle AOB = 90^\circ$  ಮತ್ತು

$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

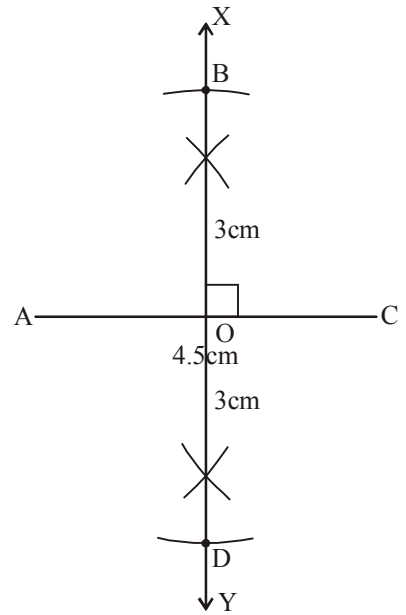
ಈಗ ಹಂತ 2 ಮುಂದುವರಿಸಿ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



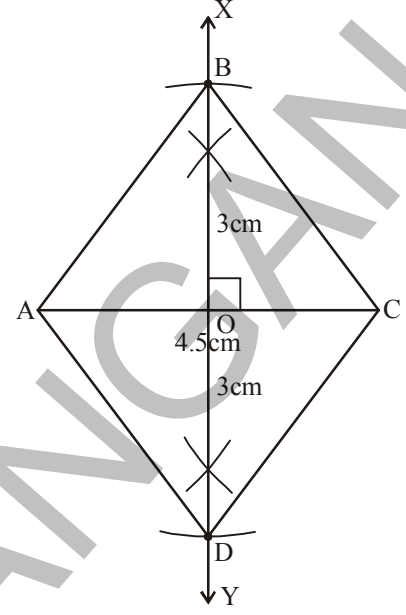
ಹಂತ 2:  $\overline{AC} = 4.5$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಯಿಂದ ರೇಖಾಖಂಡ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಇದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ABCDಯ ಒಂದು ಕರ್ಣ) ಇದಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧ ರೇಖೆ  $\overline{XY}$  ನ್ನು ಎಳೆದು ಅವು ಭೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಬಿಂದುವನ್ನು 'O' ಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಹಂತ 3: ಎರಡನೇ ಕರ್ಣ  $\overline{BD}$  ಮೊದಲನೇ ಕರ್ಣ  $\overline{AC}$  ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ  $\overline{BD}$ ,  $\overline{XY}$  ರೇಖೆಯಲ್ಲಿನ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 3 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ( $OB = OD = 3$  ಸೆ.ಮೀ) ಎರಡು ಕಂಸಗಳನ್ನು  $\overline{AC}$  ಯ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಭೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು B ಮತ್ತು D ಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಹಂತ 4: (i) A, B (ii) B, C (iii) C, D (iv) D, A ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.  
ಈಗ ಉಂಟಾದುದೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ABCD ವಜ್ರಾಕೃತಿ



ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :



1. ನೀವು ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ABCD ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು AC ಪಾದ ಬದಲಾಗಿ BD ಪಾದವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸಬಲ್ಲರಾ? ಏಕೆ ರಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.
2. ಒಂದು ವೇಳೆ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಯಾವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಆ ಚಿತ್ರದ ಕಚ್ಚಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹಾಕಿ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.



ಅಭ್ಯಾಸ - 3.6

ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:

- (a)  $CR = 6$  ಸೆ.ಮೀ,  $AT = 4.8$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ CART ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- (b)  $SA = 4.3$  ಸೆ.ಮೀ,  $OP = 5$  ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿಂದ SOAP ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- (c) ಕರ್ಣ 4.2 ಸೆ.ಮೀ. ಅಳತೆಯಿಂದ JUMP ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ರಚಿಸಲು ಐದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಅಳತೆಗಳು ಬೇಕು.
2. ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾದರೆ ನಾವು ಬಳಸುವ ಅಳತೆಗಳು
  - (ಅ) ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ ಕೊಟ್ಟಾಗ.
  - (ಆ) ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣ ಕೊಟ್ಟಾಗ.
  - (ಇ) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.
  - (ಈ) ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.
  - (ಉ) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.
3. ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾದ, ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಹ ರಚಿಸಬಹುದು.

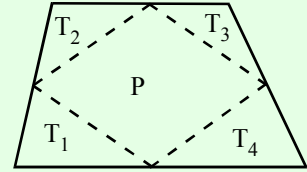
### ಉಪಾಧ್ಯಾಯರಿಗೆ ಸುಚನೆಗಳು :

ಕೋನಮಾಪಕದಿಂದ ಎಳೆದ ಕೋನಗಳು ಖಚಿತವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಅಲ್ಲದೆ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು ಆದರೆ ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡಲು, ಸರಿನೋಡಲು ಮಾತ್ರವೇ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅನುಕೂಲವಾದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ತಿಳಿಸಬೇಕು.

### ಜೋಡಿಸಿ ಆನಂದಿಸಿ

ಒಂದು ಕಾಗದವನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಒಂದು ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ, ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳು  $T_1, T_2, T_3, T_4$  ಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ P ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

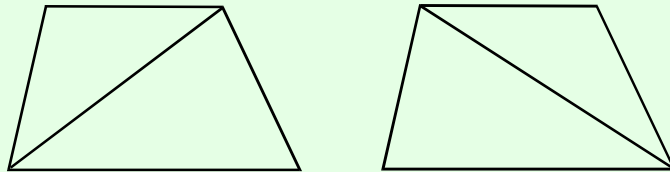
ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಜೋಡಿಸ ಬಲ್ಲೀರಾ?



### ಒಂದು ಸಣ್ಣ ತಮಾಷೆ :

$$\text{ಚತುರ್ಭುಜ} + \text{ಚತುರ್ಭುಜ} = \text{ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ?}$$

ಒಂದು ಕಾಗದವನ್ನು ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಡಚಿ, ಕತ್ತರಿಯಿಂದ ಎರಡು ಬಹಿರ್ವಕ್ರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿರಿ. ಮೊದಲ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಎರಡನೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



## ಘಾತಾಂಕಗಳು

### 4.0 ಪೀಠಿಕೆ

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \text{ ಮತ್ತು}$$

$$3^m = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \dots \dots \dots (m \text{ ಬಾರಿ}) \text{ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು}$$

ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ?

ಸೂರ್ಯನ ಅಂದಾಜು ವ್ಯಾಸ 1,40,00,00,000 ಮೀ ಮತ್ತು

ಸೂರ್ಯನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ 1,989,100,000,000,000,000,000,000,000,000 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ

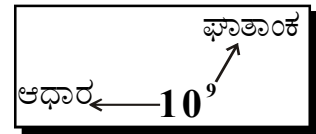
ಭೂಮಿಯಿಂದ ಸೂರ್ಯನಿಗಿರುವ ಅಂತರವು ಸುಮಾರು 149,600,000,000 ಮೀ. ವಿಶ್ವದ ಅಂದಾಜು ವಯಸ್ಸು 12,000,000,000 ವರ್ಷಗಳು. ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ಸರಿ ಸುಮಾರು 1,353,000,000 ಘನ ಕಿ.ಮೀ ಗಳಷ್ಟು ಸಮುದ್ರ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದೆ.

ಚೌಕ ಬೋರ್ಡಿನ ಪ್ರತಿ ಚೌಕವನ್ನು ಕಾಳುಗಳಿಂದ ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. ಒಂದನೇ ಚೌಕವನ್ನು ಒಂದೇ ಕಾಳಿನಿಂದ ತುಂಬಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನುಳಿದ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತುಂಬಲಾಗಿದೆ ಎಂದರೆ, ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಚೌಕದ ಎರಡರಷ್ಟು ಕಾಳುಗಳಿಂದ ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. 64 ಚೌಕಗಳನ್ನು ತುಂಬುವುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಕಾಳುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆಯೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಇವು 8,446,744,073,709,551,615 ಕಾಳುಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಈ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಓದುವುದು, ಬರೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಬಹಳ ಕಷ್ಟವಲ್ಲವೇ? ಘಾತಾಂಕಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದ್ದವೋ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

$$1,40,00,00,000 \text{ m} = 1.4 \times 10^9 \text{ ಮೀ.}$$

$10^9$  ನ್ನು 10ರ ಘಾತ 9 ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.



### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

- ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ  
(i)  $3^7 \times 3^3$  (ii)  $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$  (iii)  $3^4 \times 4^3$
- ಹೈದರಾಬಾದ್ ಮತ್ತು ದೆಹಲಿಗೆ ಇರುವ ರೈಲು ಮಾರ್ಗದ ಉದ್ದ 1674.9 ಕಿ.ಮೀ ಇದನ್ನು ಸೆಂ.ಮೀಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವಿರಿ? ಹಾಗೆಯೇ ಇದನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

#### 4.1 ಮುಖಾಂತರ ಘಾತಸೂಚಕಗಳಿರುವ ಘಾತಾಂಕಗಳು

ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ

$$\text{ಸುರ್ಯನ ವ್ಯಾಸ} = 1400000000 \text{ ಮೀ} = 1.4 \times 10^9 \text{ ಮೀ}$$

$$\text{ಅವಗ್ಯಾಡ್ರೋ ಸಂಖ್ಯೆ} = 6.23 \times 10^{23}$$

ಇಂತಹ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಯೂನಿಟ್ ಗಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆ ಬರೆಯಬೇಕೆಂದರೆ ನಮಗೆ ಏನು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\text{ಕೂದಲಿನ ಮಂದ} = 0.000005 \text{ ಮೀ}$$

$$\text{ಮೈಕ್ರೋ ಫಿಲ್ಮ್‌ನ ದಪ್ಪ} = 0.000015 \text{ ಮೀ}$$

ಈಗ ಯೂನಿಟ್ ಗಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೋ ನೋಡೋಣ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಜ್ಞಾಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಿ.

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100 = 1000/10$$

$$10^1 = 10 = 100/10$$

$$10^0 = 1 = 10/10$$

$$10^{-1} = ?$$

ಘಾತ ಸೂಚಿಯಲ್ಲಿ 1 ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅದು ಹಿಂದಿನ ಬೆಲೆಗಿಂತ ಹತ್ತನೇ ಒಂದು ಭಾಗ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\text{ಈ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ } 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\text{ಅದೇ ರೀತಿ } 10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಕಗಳಿಂದ ನಾವು  $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$  ಅಥವಾ  $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$  ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

1 ಕಿ.ಮೀ	1 ಹೆಕ್ಟಾ.ಮೀ	1 ಡೆಕಾ.ಮೀ	1 ಮೀ	1 ಡೆಸಿ.ಮೀ	1 ಸೆಂ.ಮೀ	1 ಮಿಲಿ.ಮೀ
1000 ಮೀ	100 ಮೀ	10 ಮೀ	1 ಮೀ	$\frac{1}{10}$ ಮೀ	$\frac{1}{100}$ ಮೀ	$\frac{1}{1000}$ ಮೀ
$10^3$ ಮೀ	$10^2$ ಮೀ	$10^1$ ಮೀ	$10^0$ ಮೀ	$10^{-1}$ ಮೀ	$10^{-2}$ ಮೀ	$10^{-3}$ ಮೀ



ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$10^{-10}$  ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನ?

ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.-

$$(i) \quad 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$(ii) \quad \frac{8}{2} = 4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$(iii) \quad \frac{4}{2} = 2 = 2^1$$

$$(iv) \quad \frac{2}{2} = 1 = 2^0$$

$$(v) \quad \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$(vi) \quad \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'a' ಗೆ  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ , ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ  $a^{-m}$  ನ್ನು  $a^m$  ನ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹೇಗೆ?

$$\text{ಹಾಗೆಯೇ } a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$$



ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(i) \quad 3^{-5} \quad (ii) \quad 4^{-3} \quad (iii) \quad 7^{-4} \quad (iv) \quad 7^{-3}$$

$$(v) \quad x^{-n} \quad (vi) \quad \frac{1}{4^3} \quad (vii) \quad \frac{1}{10^3}$$

ಇದನ್ನು ನೋಡಿರಿ

ವೇಗ =  $\frac{\text{ದೂರ}}{\text{ಕಾಲ}}$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ  $s = \frac{d}{t}$ . ಇದರಲ್ಲಿ ದೂರವನ್ನು ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ

(m) ಮತ್ತು ಸಮಯವನ್ನು ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ (s), ವೇಗದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು  $m \times s^{-1}$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅದೇ ರೀತಿ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಪ್ರಮಾಣ  $\frac{\text{ಮೀ}}{\text{ಸೆ}^2}$  ( $\frac{m}{s^2}$ ). ಇದನ್ನು  $m \times s^{-2}$  ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ/ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 3456 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು

$$3456 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$$

$$3456 = (3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (5 \times 10) + (6 \times 10^0)$$

ಅದೇರೀತಿ  $7405 = (7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (0 \times 10) + (5 \times 10^0)$

ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 326.57 ನ್ನು ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಹೇಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕೋ ನೋಡೋಣ.

$$326.57 = (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + \left(\frac{5}{10}\right) + \left(\frac{7}{10^2}\right)$$

$$= (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + (5 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$$

ಹಾಗೆಯೇ  $734.684 = (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) +$

$$\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{8}{10^2}\right) + \left(\frac{4}{10^3}\right)$$

$$= (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2}) + (4 \times 10^{-3})$$



### ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

- (i) 543.67      (ii) 7054.243      (iii) 6540.305      (iv) 6523.450

## 4.2 ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು

$a^m \times a^n = a^{m+n}$  ಇಲ್ಲಿ 'a' ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, ಮತ್ತು 'm', 'n' ಗಳು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ನಾವು ಕಲ್ಪಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಇದೇ ನಿಯಮಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕ ಘಾತಾಂಕಗಳಿಗೂ ವರ್ತಿಸುತ್ತಿದೆಯೇ?

ಸರಿ ನೋಡೋಣ.

- (i)  $3^2 \times 3^{-4}$  ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} \text{ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.}$$

$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ } 3^2 \times 3^{-4} &= 3^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{3^2}{3^4} \\ &= 3^{2-4} = 3^{-2} \end{aligned}$$

ಅದೇರೀತಿ  $3^2 \times 3^{-4} = 3^{-2}$

- (ii)  $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$$(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)^{3+4}}$$

$$(\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು

$$\frac{1}{10} = 10^{-1} \text{ \& } \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ 'a' ಯಾವುದೇ 'a' ಅಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.}$$



$$= \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7}$$

ಆದ್ದರಿಂದ  $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = (-2)^{-7}$

(iii)  $(-5)^2 \times (-5)^{-5}$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$$(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^2 \times \frac{1}{(-5)^5}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{5-2}}$$

$$= (-5)^{-3}$$

ಆದರೆ

$$\left( \text{But } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \right)$$

ಆದ್ದರಿಂದ  $(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^{-3}$  (  $2+(-5) = -3$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು)

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ 'a' ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯೇತರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, 'm' ಮತ್ತು 'n' ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ,  
 $a^m \times a^n = a^{m+n}$  ;



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.**

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಘಾತಾಂಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ

(i)  $2^{-3} \times 2^{-2}$  (ii)  $7^{-2} \times 7^5$  (iii)  $3^4 \times 3^{-5}$  (iv)  $7^5 \times 7^{-4} \times 7^{-6}$

(v)  $m^5 \times m^{-10}$  (vi)  $(-5)^{-3} \times (-5)^{-4}$

ಇದೇ ರೀತಿ ಕೆಳಗಿನ ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು, 'a' ಮತ್ತು 'b' ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು 'm', 'n' ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ ಸರಿನೋಡಬಹುದು.

1.  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.  $(a^m)^n = a^{mn}$

3.  $(a^m \times b^m) = (ab)^m$

ಧನ ಘಾತ ಸೂಚಕಗಳ ನಿಯಮಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರ ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ.

$$4. \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$5. a^0 = 1$$

‘a’ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು  $a \neq 1, a \neq -1$  ಆದಾಗ  $a^m = a^n$ . ಆದಾಗ ‘m’ ಮತ್ತು ‘n’ ನಡುವೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ? ನೋಡೋಣ.

$$a^m = a^n \text{ ಆಗಿರಲಿ } \quad \text{ಎಂದುಕೊಂಡರೆ } \frac{a^m}{a^n} = 1 \text{ ( ಎರಡೂಕಡೆ } a^n \text{ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)}$$

$$\text{ಏನಂದರೆ } a^{m-n} = 1. \quad a^{m-n} = a^0 \quad \therefore m = n$$

$$\therefore m - n = 0$$

$a \neq 1$  ಏಕೆ ?

$a = 1, m = 7$  ಮತ್ತು  $n = 6$

ಆದಾಗ  $1^7 = 1^6$

$\Rightarrow 7 = 6$

ಇದು ಸರಿಯೇ?

ಆದ್ದರಿಂದ  $a \neq 1$

$a = -1$  ಆಗಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ

$a^m = a^n$  ಆದಾಗ  $m = n$  ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : (i)  $5^{-2}$  (ii)  $\frac{1}{2^{-5}}$  (iii)  $(-5)^2$  ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : (i)  $5^{-2} = \frac{1}{(5)^2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$  ( $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  ಎಂದು ಗೊತ್ತು)

(ii)  $\frac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  ( $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು)

$$2^5 = 32$$

(iii)  $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ.

(i)  $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$  (ii)  $\frac{4^7}{4^4}$  (iii)  $\left(\frac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

ಪರಿಹಾರ : (i)  $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$  ( $a^m \times a^n = a^{m+n}$  ನಿಯಮದಿಂದ)

$$= (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2}$$

$$= \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{(-5) \times (-5)} = \frac{1}{25}$$
 ( $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು)

(ii)  $\frac{4^7}{4^4}$  ( $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  ನಿಯಮದಿಂದ)

$$= 4^{7-4} = 4^3 = 64$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad & \left(\frac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6} \\
 & = (3^{5-3})^5 \times 3^{-6} \\
 & = (3^2)^5 \times 3^{-6} \\
 & = 3^{10} \times 3^{-6} = 3^4 = 81
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a^m}{a^n}\right) & = a^{m-n} \text{ ನಿಯಮದಿಂದ} \\
 (a^m)^n & = a^{mn}
 \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ಘಾತಾಂಕಗಳಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\text{(i)} \quad 4^{-7} \quad \text{(ii)} \quad \frac{1}{(5)^{-4}} \quad \text{(iii)} \quad \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \quad \text{(iv)} \quad \frac{7^{-4}}{7^{-6}}$$

**ಪರಿಹಾರ :** (i)  $4^{-7}$  (  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು)

$$= \frac{1}{(4)^7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \frac{1}{(5)^{-4}} \\
 & = 5^4
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{a^{-m}} = a^m \text{ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad & \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{4^{-3}}{7^{-3}} \\
 & = \frac{7^3}{4^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3
 \end{aligned}$$

$$\left(a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ and } a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad & \frac{7^{-4}}{7^{-6}} \\
 & = 7^{-4-(-6)} \\
 & = 7^{-4+6} = 7^2
 \end{aligned}$$

$$\text{ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ } \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$



**ಉದಾಹರಣೆ 4 :**  $27^{-4}$  ನ್ನು 3ರ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 27 ನ್ನು  $3 \times 3 \times 3 = 3^3$  ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಆದ್ದರಿಂದ} \quad & 27^{-4} = (3^3)^{-4} \\
 & = 3^{-12}
 \end{aligned}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 5 : ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ

$$(i) \left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3} \quad (ii) 4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$$

ಪರಿಹಾರ : (i)  $\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3}$

27 ನ್ನು  $3 \times 3 \times 3 = 3^3$  ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

$$\left(\frac{1}{27}\right) \times 2^{-3} = \frac{1}{3^3} \times 2^{-3}$$

$$= \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{2^3}$$

$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು

$$= \frac{1}{(3 \times 2)^3}$$

$a^m \times b^m = (ab)^m$  ನಿಯಮದಿಂದ

$$= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

$$(ii) 4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$$

$$= 4^4 \times (4^2)^{-2} \times 4^0$$

$(a^m)^n = a^{mn}$  ನಿಯಮದಿಂದ

$$= 4^4 \times 4^{-4} \times 4^0$$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$  ನಿಯಮದಿಂದ

$$= 4^{4-4+0} = 4^0$$

ಆದರೆ  $a^0 = 1$

$$= 1$$

ಉದಾಹರಣೆ 6 :  $2^x = 1$  ಆದಾಗ 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ.

ಪರಿಹಾರ : ಹಿಂದೆ ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ  $a^0 = 1$

$$2^x = 1 \quad (1 = 2^0 \text{ ಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ})$$

$$2^x = 2^0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ 'x' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ..

$$(i) 25 \times 5^x = 5^8$$

$$(ii) \frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$$

$$(iii) (3^6)^4 = 3^{12x}$$

$$(iv) (-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$$

ಪರಿಹಾರ :  $25 \times 5^x = 5^8$   
 $5^2 \times 5^x = 5^8$   
 $5^{2+x} = 5^8$   
 $2 + x = 8$   
 $\therefore x = 6$

$25 = 5 \times 5 = 5^2$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು  
ಆದರೆ  $a^m \times a^n = a^{m+n}$   
 $a^m = a^n$  ಆಗಿದ್ದಾಗ  $\Rightarrow m = n$

(ii)  $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

$\frac{1}{7^2} \times 7^{2x} = 7^8$   
 $7^{-2} \times 7^{2x} = 7^8$   
 $7^{2x-2} = 7^8$   
 $2x - 2 = 8$

$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

( $\therefore$  ಆಧಾರಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ)

$2x = 8 + 2$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore x = 5$

(iii)  $(3^6)^4 = 3^{12x}$

$3^{24} = 3^{12x}$

$24 = 12x$

$x = \frac{24}{12} = 2$

[ $\therefore (a^m)^n = a^{mn}$ ]

(ಆಧಾರಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ)

(iv)  $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+1+7} = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+8} = (-2)^{12}$

( $\therefore$  ಆಧಾರಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ)

$x + 8 = 12$

$x = 12 - 8 = 4$

ಉದಾಹರಣೆ 8 :  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$  ನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ

ಪರಿಹಾರ :  $\frac{25}{4} = \frac{5 \times 5}{2 \times 2} = \frac{5^2}{2^2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2}$$

ಆದರೆ  $(a^m)^n = a^{mn}$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \text{ ಮತ್ತು } \frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

ಉದಾಹರಣೆ 9 : ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ  $\left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \right\}$

ಪರಿಹಾರ :  $\left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \right]$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ ಎಂದು ಗೊತ್ತು}$$

$$= \left[ \left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}} \right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}} \right]$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ ಮತ್ತು } a^m = \frac{1}{a^{-m}}$$

ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು

$$= \left[ \left( \frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3} \right) \div \frac{5^2}{1^2} \right] = \left( \frac{27}{1} - \frac{8}{1} \right) \div 25$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

ಉದಾಹರಣೆ 10 :  $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$  ಆದರೆ  $x^{-2}$  ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ .

ಪರಿಹಾರ :  $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ ಎಂದು ಗೊತ್ತು}$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}}$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1

1. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ ಮತ್ತು ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ

(i)  $4^{-3}$       (ii)  $(-2)^7$       (iii)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$       (iv)  $(-3)^{-4}$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಘಾತವಿರುವಂತೆ ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i)  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$       (ii)  $(-2)^7 \times (-2)^3 \times (-2)^4$

(iii)  $4^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^4$       (iv)  $\left(\frac{5^{-4}}{5^{-6}}\right) \times 5^3$       (v)  $(-3)^4 \times 7^4$

3. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ (i)  $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$       (ii)  $(4^{-1} \times 3^{-1}) \div 6^{-1}$

4. ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ ಮತ್ತು ಸರಿಯಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ

(i)  $(4^0 + 5^{-1}) \times 5^2 \times \frac{1}{3}$       (ii)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

(iii)  $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}) \times \frac{3}{4}$       (iv)  $\frac{3^{-2}}{3} \times (3^0 - 3^{-1})$

(v)  $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^0$       (vi)  $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2$

5. ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಮತ್ತು ಸರಿಯಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

$$(i) \left[ (3^2 - 2^2) \div \frac{1}{5} \right]^2 \quad (ii) ((5^2)^3 \times 5^4) \div 5^6$$

6. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ 'n' ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(i) \left( \frac{2}{3} \right)^3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^5 = \left( \frac{2}{3} \right)^{n-2}$$

$$(ii) (-3)^{n+1} \times (-3)^5 = (-3)^{-4}$$

$$(iii) 7^{2n+1} \div 49 = 7^3$$

7.  $2^{-3} = \frac{1}{2^x}$  ಆದಾಗ 'x' ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

8.  $\left[ \left( \frac{3}{4} \right)^{-2} \div \left( \frac{4}{5} \right)^{-3} \right] \times \left( \frac{3}{5} \right)^{-2}$  ನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

9.  $m = 3$ ,  $n = 2$  ಆದಾಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(i) 9m^2 - 10n^3 \quad (ii) 2m^2 n^2 \quad (iii) 2m^3 + 3n^2 - 5m^2 n \quad (iv) m^n - n^m$$

10.  $\left( \frac{4}{7} \right)^{-5} \times \left( \frac{7}{4} \right)^{-7}$  ನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸರಿಯಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ

#### 4.3 ಆದರ್ಶರೂಪ (Standard Form) ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವಾಗ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಬಳಕೆ

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿ (Standard Form) ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

$$\text{ಉದಾ : } 300,000,000 = 3 \times 10^8$$

ಈಗ ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

0.000003 ಮೀ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಚಿಪ್‌ನ ವೈರನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$$0.000003 \text{ ಮೀ} = \frac{3}{1000000}$$

$$= \frac{3}{10^6}$$

$$= 3 \times 10^{-6} \text{ ಮೀ}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } 0.000003 = 3 \times 10^{-6} \text{ ಮೀ}$$



ಹಾಗೆಯೇ 0.00001275 ಮೀ ಅಳತೆ ಇರುವ ಸಸ್ಯದ ಕೋಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned} 0.00001275 \text{ ಮೀ} &= \frac{1275}{100000000} \\ &= 1.275 \times \frac{10^3}{10^8} \\ &= 1.275 \times 10^{-5} \text{ ಮೀ} \end{aligned}$$



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ !**

- ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಬರೆಯಿರಿ.
  - ಸೂರ್ಯ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯ ನಡುವಿನ ದೂರ 149,600,000,000 ಮೀ
  - ಸೂರ್ಯನ ಸರಾಸರಿ ತ್ರಿಜ್ಯ 695000 ಕಿ.ಮೀ
  - ಮಾನವನ ತಲೆಗೂದಲಿನ ದಪ್ಪದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 0.08 ರಿಂದ 0.12 ಮಿ.ಮೀ.
  - ಮೌಂಟ್ ಎವರೆಸ್ಟ್ ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವು 8848 ಮೀ
- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
  - 0.0000456
  - 0.000000529
  - 0.0000000085
  - 6020000000
  - 35400000000
  - $0.000437 \times 10^4$

#### 4.4 ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕ ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು.

ಸೂರ್ಯನ ವ್ಯಾಸ 14000000000 ಮೀ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸ 12750000 ಮೀ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದರೆ ಭೂಮಿಗಿಂತ ಸೂರ್ಯನ ಪರಿಮಾಣ ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ನಾವು ಸೂರ್ಯನ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$$\text{ಅದು } \frac{14000000000}{12750000}$$

ಇದು ಕಷ್ಟಕರವಲ್ಲವೇ? ಇದನ್ನು ನಾವು ಆದರ್ಶರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಸುಲಭವಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಸೂರ್ಯನು, ಭೂಮಿಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ನೋಡೋಣ.

$$\text{ಸೂರ್ಯನ ವ್ಯಾಸ} = 14000000000 \text{ ಮೀ} = 1.4 \times 10^9 \text{ ಮೀ}$$

$$\text{ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸ} = 12750000 = 1.275 \times 10^7 \text{ ಮೀ}$$

$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ } \frac{\text{ಸೂರ್ಯನ ವ್ಯಾಸ}}{\text{ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸ}} &= \frac{1.4 \times 10^9}{1.275 \times 10^7} \\ &= \frac{1.4 \times 10^2}{1.275} \end{aligned}$$

$$\approx 10^2 = 100 \quad (\text{ಅಂದಾಜು})$$

ಸೂರ್ಯನ ವ್ಯಾಸವು, ಭೂಮಿಯ ವ್ಯಾಸಕ್ಕಿಂತ ಸರಿಸುಮಾರು 100 ಪಟ್ಟುಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂರ್ಯನು ಭೂಮಿಗಿಂತಲೂ 100 ಪಟ್ಟುಹೆಚ್ಚು ಪರಿಮಾಣ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡೋಣ. ಭೂಮಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ  $5.97 \times 10^{24}$  ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ  $7.35 \times 10^{22}$  ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಇವೆರಡರ ಒಟ್ಟು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಎಷ್ಟು ?

$$\text{ಭೂಮಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ} = 5.97 \times 10^{24} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

$$\text{ಚಂದ್ರನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ} = 7.35 \times 10^{22} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

$$\text{ಒಟ್ಟು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ} = 5.97 \times 10^{24} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ} + 7.35 \times 10^{22} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

$$= (5.97 \times 10^2 \times 10^{22} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}) + 7.35 \times 10^{22} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

$$= (5.97 \times 10^2 + 7.35) \times 10^{22} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

$$= (597 + 7.35) \times 10^{22} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

$$= 604.35 \times 10^{22} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

$$= 6.0435 \times 10^{24} \text{ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ}$$

ನಾವು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಬೇಕಾದರೆ ನಾವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಘಾತ ರೂಪವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು.

**ಉದಾಹರಣೆ 11 :** ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$(i) 4.67 \times 10^4 \quad (ii) 1.0001 \times 10^9 \quad (iii) 3.02 \times 10^{-6}$$

**ಪರಿಹಾರ :** (i)  $4.67 \times 10^4 = 4.67 \times 10000 = 46700$

(ii)  $1.0001 \times 10^9 = 1.0001 \times 1000000000 = 1000100000$

(iii)  $3.02 \times 10^{-6} = 3.02/10^6 = 3.02/1000000 = 0.00000302$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 0.000000000947 (ii) 543000000000

(iii) 48300000 (iv) 0.00009298 (v) 0.0000529

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i)  $4.37 \times 10^5$  (ii)  $5.8 \times 10^7$  (iii)  $32.5 \times 10^{-4}$  (iv)  $3.71529 \times 10^7$

(v)  $3789 \times 10^{-5}$  (vi)  $24.36 \times 10^{-3}$

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಚಾರಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾದ ಪರಿಮಾಣ 0.0000004 ಮೀ.

- (ii) ಕೆಂಪು ರಕ್ತ ಕಣಗಳ ಪರಿಮಾಣ 0.000007 ಮಿ.ಮೀ.  
 (iii) ಬೆಳಕಿನ ವೇಗ 300000000 ಮೀ/ಸೆಕೆಂಡ್  
 (iv) ಚಂದ್ರ ಮತ್ತು ಯೂರ್ಯನ ನಡುವಿನ ದೂರ 384467000 ಮೀ (ಅಂದಾಜು)  
 (v) ಎಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿನ ಆವೇಶ 0.0000000000000000016 ಕುಲಂಬ್ಸ್  
 (vi) ಕಾಗದ ತುಂಡಿನ ದಪ್ಪ 0.0016 ಸೆ.ಮೀ.  
 (vii) ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಚಿಪ್‌ನ ವೈರಿನ ವ್ಯಾಸ 0.000005 ಸೆ.ಮೀ.
4. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 5 ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು 5 ಪೇಪರ್ ಷೀಟ್‌ಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಪುಸ್ತಕದ ಮಂದ 20 ಮಿ.ಮೀ ಮತ್ತು ಪೇಪರಿನ ಮಂದ 0.016 ಮಿ. ಮೀಗಳಾದರೆ ಆ ಪುಸ್ತಕದ ಕಟ್ಟಿನ ಒಟ್ಟು ಮಂದವೆಷ್ಟು?
5. ರಾಕೇಟ್ ಕಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ? ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಏಕೆ? ನಿಮ್ಮ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಋಜುವಾತು ಮಾಡುವಿರಿ.

(i)  $x^{-3} \times x^{-2} = x^{-6}$       (ii)  $\frac{x^3}{x^2} = x^4$       (iii)  $(x^2)^3 = x^2^3 = x^8$

(iv)  $x^{-2} = \sqrt{x}$       (v)  $3x^{-1} = \frac{1}{3x}$

### ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :

ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳ ಫ್ರಾಡ್‌ಶಾಲೆಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕ ಘಾತ ಬಳಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು:

- ಋಣಘಾತ ವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.
 

(a)  $a^m \times a^n = a^{m+n}$       (b)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$       (c)  $(a^m)^n = a^{mn}$

(c)  $a^m \times b^m = (ab)^m$       (d)  $a^0 = 1$       (e)  $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಋಣಘಾತ ಬಳಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.
- ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು.
- ಸಾಮಾನ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.

## ಸಮಾನುಪಾತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು

### 5.1 ಪರಿಚಯ

ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಕೆಲಸಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ಸಲ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತವನ್ನು, ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ನಾವು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ

ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 40 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತರಗತಿ ಲೀಡರ್ ಗೋಸ್ವರ ಮತದಾನ ನಿರ್ವಹಿಸಲಾಯಿತು. ಸ್ನಿಗ್ಧಳನ್ನು 24 ಓಟುಗಳಿಂದ ಮೊದಲ ಲೀಡರ್ ಆಗಿ, ಸಿರಿಯನ್ನು 16 ಓಟುಗಳಿಂದ ಎರಡನೇ ಲೀಡರ್ ಆಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಸ್ನಿಗ್ಧ ಮತ್ತು ಸಿರಿ ಇಬ್ಬರಿಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳ ಅನುಪಾತ 24 : 16. ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದ ನಂತರ ಅನುಪಾತ ಏನಾಗಿರುತ್ತದೆ? ಅದು 3 : 2.

ಒಂದೇ ಬಗೆಯ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಭಾಗಾಕಾರ ರೀತಿಯ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುವರು.



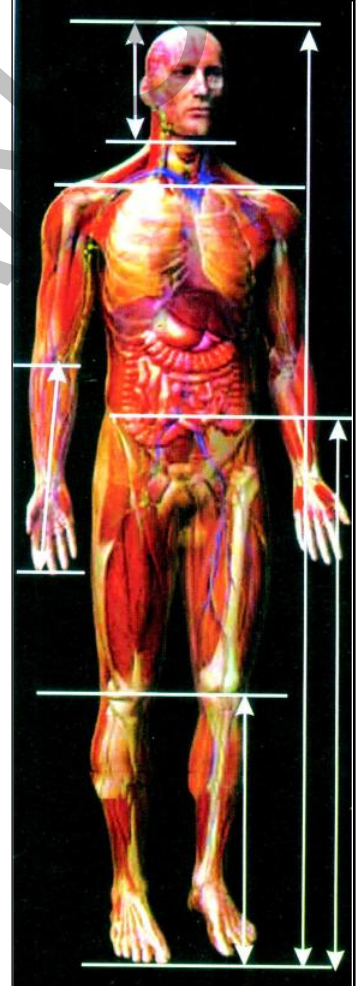
#### ಇನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ:-

- ನಿಮ್ಮ ಸೈಕಲ್ ಗೇರ್ ಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
ಪೆಡಲ್ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ದೊಡ್ಡ ಹಲ್ಲುಗಳ ಚಕ್ರ ದಲ್ಲಿನ ಹಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಹಿಂದಿನ ಚಕ್ರದ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಚಿಕ್ಕ ಚಕ್ರ ಹಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.  
{ ದೊಡ್ಡ ಹಲ್ಲುಗಳ ಚಕ್ರದಲ್ಲಿನ } : { ಚಿಕ್ಕ ಹಲ್ಲುಗಳ ಚಕ್ರದಲ್ಲಿನ }  
ಹಲ್ಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಲ್ಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಇದನ್ನು ಗೇರ್ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುವರು. ಒಂದು ಸಲ ಪೆಡಲ್ ಅನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವುದರಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಚಕ್ರ ಒಂದು ಸಲ ತಿರುಗಿದರೆ ಚಿಕ್ಕ ಚಕ್ರ ಎಷ್ಟು ಸಲ ತಿರುಗುತ್ತಿದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.



- ಯಾವುದಾದರೂ ಐದು ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿದ ಶೇಕಡಗಳನ್ನು ದಿನಪತ್ರಿಕೆಗಳಿಂದ ಶೇಖರಣೆ ಮಾಡಿ ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂಟಿಸಿರಿ.



#### ಮಾನವ ಶರೀರದಲ್ಲಿನ ಗೋಲ್ಡ್ ರೇಷಿಯೋ

ಗೋಲ್ಡ್ ರೇಷಿಯೋಯಿಂದ ಮಾನವನಿಗೆ ವಿನ್ಯಾಸಿತ ಇಲ್ಲ. ದೈವಿಕ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ನಮ್ಮ ಶರೀರದ ಶಿಲ್ಪಶಾಸ್ತ್ರ ಒಂದು ಸರಿಯಾದ ಉದಾಹರಣೆ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

- ಎತ್ತರ : ನಾಭಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಉದ್ದ.
  - ಭುಜರೇಖೆ ಉದ್ದ : ತಲೆಯ ಉದ್ದ
  - ಕೈಬೆರಳು ತುದಿ ಯಿಂದ ಮೂಣಕ್ಕೆ ವರೆಗೆ ದೂರ : ಮಣಿಕಟ್ಟು ಮತ್ತು ಮೂಣಕ್ಕೆ ನಡುವಿನ ದೂರ :
  - ನಾಭಿ ಮತ್ತು ಮೂಣಕಾಲ ವರೆಗಿನ ದೂರ : ಮೂಣಕಾಲ ಮತ್ತು ಪಾದದ ನಡುವಿನ ದೂರ
- ಗೋಲ್ಡ್ ರೇಷಿಯೋ.. **1.615:1**

**ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ:(Compound Ratio)**

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆ? ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ರಾಮಯ್ಯ ಮತ್ತು ಗೋಪಾಲ ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹ 2000 ಮತ್ತು ₹ 3000 ಬಂಡವಾಳಗಳಿಂದ ಒಂದು ವ್ಯಾಪಾರವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ವರ್ಷಾಂತದಲ್ಲಿ ಅವರಿಗೆ ಬಂದ ಲಾಭವನ್ನು ಅವರು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

ಬಂಡವಾಳಗಳ ಅನುಪಾತ = 2000: 3000  
= 2: 3

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅವರಿಬ್ಬರು ವರ್ಷವೆಲ್ಲಾ ಬಂಡವಾಳ ಇಟ್ಟರು

ತಿಂಗಳು	ಜನವರಿ	ಫೆಬ್ರವರಿ	ಮಾರ್ಚ್	ಏಪ್ರಿಲ್	ಮೇ	ಜೂನ್	ಜುಲೈ	ಆಗಸ್ಟ್	ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್	ಅಕ್ಟೋಬರ್	ನವಂಬರ್	ಡಿಸೆಂಬರ್	ಒಟ್ಟು ಪಾಲು
ರಾಮಯ್ಯನ ಪಾಲು	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	24
ಗೋಪಾಲನ ಪಾಲು	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	36

ಅವರ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತ = 24: 36

= 2: 3 ಮತ್ತು ಅವರ ಪಾಲುಗಳ ಬಂಡವಾಳ ಕಾಲಾವಧಿಯ ಅನುಪಾತ = 1:1

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಸಮಾನ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಬಂಡವಾಳ ಇಟ್ಟಾಗ ಬಂಡವಾಳ ಅನುಪಾತ ಅವರ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಂದ ಲಾಭವನ್ನು ಅದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ 2:3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ

**ಸಂದರ್ಭ 1:** ಅವರಿಬ್ಬರು ವ್ಯಾಪಾರವನ್ನು ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರು ₹ 5000 ಬಂಡವಾಳದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದಾರೆಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಆ ದರೆ ರಾಮಯ್ಯ ತನ್ನ ಬಂಡವಾಳವನ್ನು 12 ತಿಂಗಳು ಇಟ್ಟರೆ, ಗೋಪಾಲ ಕೇವಲ 9 ತಿಂಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಬಂಡವಾಳ ಇಟ್ಟನು. ಅವರಿಬ್ಬರು ಲಾಭವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ? ಅವರಿಬ್ಬರು ಸಮಾನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬಂಡವಾಳವಾಗಿ ಇಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ ಲಾಭವನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿ ವರ್ಷಾಂತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಾ? ಇಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ! ಏಕೆಂದರೆ ರಾಮಯ್ಯ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಾಲ ಬಂಡವಾಳ ಇಟ್ಟಿದ್ದಾನಲ್ಲವೇ.

ಅವರ ಬಂಡವಾಳಗಳ ಅನುಪಾತ = 5000: 5000 = 1:1

ತಿಂಗಳು	ಜನವರಿ	ಫೆಬ್ರವರಿ	ಮಾರ್ಚ್	ಏಪ್ರಿಲ್	ಮೇ	ಜೂನ್	ಜುಲೈ	ಆಗಸ್ಟ್	ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್	ಅಕ್ಟೋಬರ್	ನವಂಬರ್	ಡಿಸೆಂಬರ್	ಒಟ್ಟು ಪಾಲು
ರಾಮಯ್ಯನ ಪಾಲು	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	24
ಗೋಪಾಲನ ಪಾಲು	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹				36

ಅವರ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತ =  $12:9 = 4:3$  ಮತ್ತು ಕಾಲಗಳ ಅನುಪಾತ =  $12:9 = 4:3$

ಅವರ ಬಂಡವಾಳ ಸಮಾನ ಅಂದರೆ ಅವರು ಬಂಡವಾಳಗಳಿಟ್ಟು ಕಾಲಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಾಭವನ್ನು ಬಂಡವಾಳ ಇಟ್ಟು ಕಾಲಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಸಂದರ್ಭ 2 : ಹಾಗೆಯೇ ರಾಮಯ್ಯ ₹ 2000 ಗಳನ್ನು 12 ತಿಂಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಗೋಪಾಲ ₹ 3000 ಗಳನ್ನು 9 ತಿಂಗಳಿಗೆ ಬಂಡವಾಳ ಇಟ್ಟಿದ್ದಾರೆಂದು ಕೊಳ್ಳಿ. ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಂದ ಲಾಭವನ್ನು ಅವರು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು? ಅವರ ಬಂಡವಾಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಅವರ ಕಾಲಾವಧಿ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ? ರಾಮಯ್ಯನು ಕಡಿಮೆ ಬಂಡವಾಳವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಾಲಾವಧಿಗೆ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಇಲ್ಲಿನಾವು ಅವರ ಬಂಡವಾಳಕ್ಕೆ, ಕಾಲಾವಧಿಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ಕೊಡಬೇಕು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕು?

ಬಂಡವಾಳಗಳ ಅನುಪಾತ =  $2000:3000 = 2:3$

ಕಾಲಗಳ ಅನುಪಾತ =  $12:9 = 4:3$

ತಿಂಗಳು	ಜನವರಿ	ಫೆಬ್ರವರಿ	ಮಾರ್ಚ್	ಏಪ್ರಿಲ್	ಮೇ	ಜೂನ್	ಜುಲೈ	ಆಗಸ್ಟ್	ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್	ಅಕ್ಟೋಬರ್	ನವೆಂಬರ್	ಡಿಸೆಂಬರ್	ಒಟ್ಟು ಪಾಲು
ರಾಮಯ್ಯನ ಪಾಲು	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	24
ಗೋಪಾಲನ ಪಾಲು	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹				36

ಅವರ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತ =  $24 : 27 = 8 : 9$

ಕಾಲಾವಧಿಗಳ ಅನುಪಾತ =  $(2 \times 12) : (3 \times 9) = 8 : 9$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತ  $2:3$  ಮತ್ತು ಕಾಲಾವಧಿಯ ಅನುಪಾತ  $4:3$ . ಆದ್ದರಿಂದ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತ  $(2 \times 12) : (3 \times 9) = 8:9$ . ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಂದ ಲಾಭವನ್ನು  $8:9$  ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ನೀವು ಬಂಡವಾಳ ಮತ್ತು ಕಾಲಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೂ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೀರಾ?

ಅವರ ಪಾಲುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು

$8:9 = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} :: 4:3$   $2:3$  ಮತ್ತು  $4:3$  ಅನುಪಾತಗಳಿಗೆ

ಪೂರ್ವಪದಗಳ  
ಗುಣಲಬ್ಧ

ಅಂತ್ಯಪದಗಳ  
ಗುಣಲಬ್ಧ

ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ತರಲು ನಾವು ಆ ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳ ಪೂರ್ವಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಬಂದ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನಾವು ಆ ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಭಿನ್ನಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

$a:b$  ಮತ್ತು  $c:d$  ಗಳು ಕೊಟ್ಟರೆ ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  ಎಂದರೆ  $ac:bd$ .



### ಇನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ

- ಕೆಳಗಿನ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೆ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(a) 3 : 4 ಮತ್ತು 2 : 3      (b) 4 : 5 ಮತ್ತು 4 : 5      (c) 5 : 7 ಮತ್ತು 2 : 9
- ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

### ಶಿಕ್ಷಣ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

M. K. ನಗರ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಪ್ರದರ್ಶನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಮಾರುವುದರ ಮೂಲಕ ಚಂದಾ ಶೇಖರಿಸಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. 8 ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 300 ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳನ್ನು 7 ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 250 ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಮಾರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರದರ್ಶನಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗಂಟೆ ಮುಂದೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ 8 ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 225 ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳನ್ನು 7 ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 200 ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದಂತೆ ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಯಾವ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಮಾರುವುದರಲ್ಲಿ ಅವರಿಗೆ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಬಂದಿದ್ದಾರೆ?

ಯಾವ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅವರ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದ್ದಾರೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ನೀವು 225:300 ಮತ್ತು 200:250. ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೀರಿ. 8 ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳ ಅನುಪಾತ 3:4 ಮತ್ತು 7 ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳ ಅನುಪಾತ 4:5. ನೀವು ಇದನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಾ? ಅರ್ಥವಂತವಾಗಿ ಹೋಲಿಸುವುದು ಕಷ್ಟ ಅಲ್ಲವೇ ಆದ್ದರಿಂದ ನೋಡಿದ ತಕ್ಷಣ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ! ಅವನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಅನುಪಾತಗಳು ಬೇಕು. ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಶೇಕಡೆಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಒಂದು ಪದ್ಧತಿ.

ಶೇಕಡಾ (%) ಎಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 100 ರಿಂದ ಹೋಲಿಸುವುದು. ಶೇಕಡಾ ಎಂದರೆ ಪ್ರತಿ ನೂರಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿ ನೂರರಲ್ಲಿ ಎಂದರ್ಥ  $100\% = \frac{100}{100}$  ಅಂದರೆ 100 ಭೇದವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$$8 \text{ ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮಾರಲಾದ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳ ಶೇಕಡಾ} = \frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$$

$$7 \text{ ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮಾರಲಾದ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳ ಶೇಕಡಾ} = \frac{4}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$$

ಇದರಿಂದ ನಾವು ಟಿಕೆಟ್ ಮಾರಬೇಕೆಂಬ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ 7 ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬಂದಿದ್ದಾರೆಂದು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಶೇಕಡಾ ಎನ್ನುವುದು 100 ನಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭೇದವನ್ನು 100 ಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಮಾಡಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅಂಶ ಭೇದಗಳನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ನಾವು ಶೇಕಡಾಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಆಳತೆಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಮೊದಲ ಪರಿಚಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸ್ಥಿಗ್ಧ, ಸಿರಿಗಳಿಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಹೋಲಿಸಬಹುದು.

ಸ್ಥಿಗ್ಧಿಗೆ 40 ಮತಗಳಲ್ಲಿ 24 ಬಂದಿವೆ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಪ್ರತಿ 5 ಮತಗಳಿಗೆ ಬಂದಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. .  
ಬಂದ ಶೇಕಡ  $\frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$

ಇನ್ನೊಂದು ಪದ್ಧತಿ  
40 ಮತಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿಗ್ಧಿಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳು 24 ಆದ್ದರಿಂದ 100 ಮತಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿಗ್ಧಿಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳು =  $\frac{24}{40} \times 100 = 60$   
ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿ 100 ಮತಗಳಿಗೆ 60 ಮತಗಳು ಆಕೆಗೆ ಬಂದಿವೆ ಎಂದರೆ ಆಕೆಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳ ಶೇಕಡಾ = 60%

ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮತ ಹಾಕಿರುವುದರಿಂದ,

ಸ್ಥಿಗಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳ ಶೇಕಡಾ + ಸಿರಿಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳ ಶೇಕಡಾ = 100%

60% + ಸಿರಿಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳ ಶೇಕಡಾ = 100%

ಸಿರಿಗೆ ಬಂದ ಮತಗಳ ಶೇಕಡಾ = 100% - 60% = 40%

## 5.2 ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

- ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10% ಬೆಳೆದಿದೆ.
- ಮನೆಗಳ ಬೆಲೆಗಳು 12% ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ.
- 2020 ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಲಾ CO<sub>2</sub> ಬಿಡುಗಡೆ 25% ಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಬೇಕಾಗಿದೆ.

ರಾಶಿಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಬಾರಿ ನಾವು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಶೇಕಡಾಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳಿವೆ. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ

(1) ಒಂದು ಕಂಪನಿಗೆ ಹಿಂದಿನ ತಿಂಗಳ ಮಾರಾಟ ಒಟ್ಟು ₹ 98,700 ಈ ಮಾರಾಟದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಈ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ 35% ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕೆಂದು ಆ ಕಂಪನಿ ಸೇಲ್ಸ್ ಮ್ಯಾನೇಜರ್ ತನ್ನ ಕೆಳಗಿರುವ ಸಿಬ್ಬಂದಿಗೆ ಹೇಳಿದನು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಿಬ್ಬಂದಿ ಈ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಮಾರಾಟದ ಗುರಿ ಎಷ್ಟು?

ಹಿಂದಿನ ತಿಂಗಳ ಮಾರಾಟ = ₹ 98,700.	ಏಕಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ
₹ 98,700 ರಲ್ಲಿ 35% = $\frac{35}{100} \times 98,700$	35% ಹೆಚ್ಚಳ ಎಂದರೆ
= ₹ 34,545	₹ 100 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಳ ದಿಂದ ₹ 135.
ಈ ತಿಂಗಳ ಮಾರಾಟದ ಗುರಿ	₹ 98,700 ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಳದಿಂದ?
= ₹ 98,700 + 34,545	ಹೆಚ್ಚಾಗಬೇಕಾದ ಮಾರಾಟ = ₹ $\frac{135}{100} \times 98,700$
= ₹ 1,33,245.	= ₹ 1,33,245.

ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದೆಂದರೆ, ಕಡಿಮೆಯಾಗಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೊಟ್ಟ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿಂದ ಅದನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಜೊತೆ ಶೂಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 550. ಅವುಗಳ ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ 10% ಕಡಿತ ಇದ್ದರೆ ಆ ಶೂಗಳ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$$\begin{aligned} \text{ಶೂಗಳ ಬೆಲೆ} &= ₹ 550. \\ \text{ಕಡಿತ} &= ₹ 550 \text{ ರಲ್ಲಿ } 10\% \\ &= \frac{10}{100} \times 550 = ₹ 55. \\ \text{ಹೊಸ ಬೆಲೆ} &= \text{ಅಸಲು ಬೆಲೆ} - \text{ಕಡಿತ} \\ &= ₹ 550 - ₹ 55 = ₹ 495. \end{aligned}$$

### ಆಲೋಚನೆ ಚರ್ಚಿಸಿಬರೆಯಿರಿ



1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಎಂದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಳ 100%. ನಾವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ತಗ್ಗಿದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಕಡಿತದ ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟು?

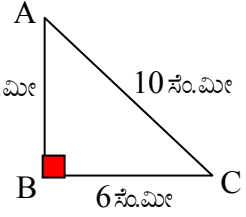


2. ₹ 2400 ಕ್ಕಿಂತ ₹ 2000 ಎನ್ನುವುದು ಎಷ್ಟು ಶೇಕಡಾ ಕಡಿಮೆ? ಹಾಗೆಯೇ ₹ 2000 ಕ್ಕಿಂತ ₹ 2400 ಎನ್ನುವುದು ಎಷ್ಟು ಶೇಕಡ ಹೆಚ್ಚು. ಈ ಎರಡು ಶೇಕಡಗಳು ಸಮಾನವೇನಾ?



### ಅನ್ವೇಷಣೆ 5.1

- ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
  - ಸ್ಥಿತ ತನ್ನ ಕಾರ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ದಿನಕ್ಕೆ 6 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತಾಳೆ. ಕಾಜಲ್ ತನ್ನ ಕಾರ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ದಿನಕ್ಕೆ 8 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತಾಳೆ. ಅವರಿಬ್ಬರು ಕೆಲಸ ವೇಳೆಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
  - ಒಂದು ಮಡಿಕೆಯಲ್ಲಿ 8 ಲೀಟರ್‌ಗಳ ಹಾಲು, ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ 750 ಮಿ.ಲೀ. ಹಾಲು ಇದೆ. ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತವೆಷ್ಟು?
  - ಒಂದು ಸೈಕಲ್‌ನ ವೇಗ ಗಂಟೆಗೆ 15 ಕಿ.ಮೀ. ಒಂದು ಸ್ಕೂಟರ್ ವೇಗ ಗಂಟೆಗೆ 30 ಕಿ.ಮೀ. ಅವುಗಳ ವೇಗಗಳ ಅನುಪಾತವೆಷ್ಟು?
- 5:8 ಮತ್ತು 3:7 ಗಳ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ  $45:x$ . ಆದರೆ  $x$  ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
- 7:5 ಮತ್ತು 8:x ಗಳ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ  $84:60$ . ಆದರೆ  $x$  ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
- 3:4 ಮತ್ತು 4:5 ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ  $45:x$ . ಆದರೆ  $x$  ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
- ಒಂದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 60 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮೂರು ಜನ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಇರಬೇಕು. ಆ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 400 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ದಾಖಲಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಬೇಕು?
- ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಸಲ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು 8 ಸಂ.ಮೀ ಬರೆಯಿರಿ. (ಸೂಚನೆ: AB, BC ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ: 8:6)
- 24 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 9 ಜನ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 75% ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. 75% ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 75% ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನುಪಾತವೆಷ್ಟು?
- 'MISSISSIPPI' ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಸ್ವರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ, ವ್ಯಂಜನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದನ್ನು ಸರಳೀಕೃತರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.
- ರಾಜೇಂದ್ರ, ರೆಹಾನಾ ಇಬ್ಬರು ಒಂದು ವ್ಯಾಪಾರವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ರೆಹಾನಾ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಬಂದ ಲಾಭದಲ್ಲಿ 5% ಅನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಒಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ರೆಹಾನಾ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಮೊತ್ತ ₹ 2080 ಆದರೆ ಆ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಅವರಿಗೆ ಬಂದ ಒಟ್ಟು ಲಾಭವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
- $\Delta ABC$  ಯಲ್ಲಿ  $AB = 2.2$  ಸಂ.ಮೀ.,  $BC = 1.5$  ಸಂ.ಮೀ ಮತ್ತು  $AC = 2.3$  ಸಂ.ಮೀ.  $\Delta XYZ$  ಯಲ್ಲಿ  $XY = 4.4$  ಸಂ.ಮೀ,  $YZ = 3$  ಸಂ.ಮೀ ಮತ್ತು  $XZ = 4.6$  ಸಂ.ಮೀ. ಆದರೆ  $AB : XY, BC : YZ, AC : XZ$ . ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ  $\Delta ABC$  ಮತ್ತು  $\Delta XYZ$  ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯಾ? [ಸೂಚನೆ : ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆಂದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು]
- ಮಾಧುರಿ ಒಂದು ಸೂಪರ್ ಮಾರ್ಕೆಟ್‌ಗೆ ಹೋದಾಗ ಅಲ್ಲಿ ಬದಲಾದ ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ. ಅಕ್ಕಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ 5% ಕಡಿತ, ಜಾಮ್ ಮತ್ತು ಹಣ್ಣುಗಳ ಮೇಲೆ 8% ಕಡಿತ ಮತ್ತು ಎಣ್ಣೆ, ಬೇಳೆಕಾಳುಗಳ ಮೇಲೆ 10% ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಬದಲಾದ



ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಮಾಧುರಿಗೆ ಸಹಕರಿಸಿರಿ.

ವಸ್ತುಗಳು	ಅಸಲಾದ ಬೆಲೆ	ಬದಲಾದ ಬೆಲೆ
ಅಕ್ಕಿ	₹ 30	
ಜಾಮ್	₹ 100	
ಆಪಿಲ್ ಹಣ್ಣು	₹ 280	
ಎಣ್ಣೆ	₹ 120	
ಬೆಳೆಕಾಳು	₹ 80	

12. ಒಂದು ಕ್ಲಬ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷ 2075 ಜನ ಸೇರಿದ್ದಾರೆ. ಈ ವರ್ಷ ಸೇರಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆ 4% ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ
  - (a) ಕಡಿಮೆಯಾದ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ
  - (b) ಈ ವರ್ಷ ಸೇರಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
13. ಒಬ್ಬ ರೈತ ನಿಗೆ ಕಳೆದ ವರ್ಷ ಹತ್ತಿ ಬೆಳೆಯಿಂದ 1720 ಚೀಲಗಳ ಇಳುವರಿ ಬಂದಿದೆ. ಈ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವನು ಹತ್ತಿ ಬೆಳೆಯ ಮೇಲೆ 20% ಹೆಚ್ಚಿನ ಇಳುವರಿಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ವರ್ಷ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಚೀಲಗಳ ಹತ್ತಿ ಬೆಳೆಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದಾನೆ.
14. P ಮತ್ತು Qಗಳು ABರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ, ABಗೆ ಒಂದೇ ಕಡೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳು. P ಬಿಂದು ABನ್ನು 2 : 3 ದಲ್ಲಿ, Q ಬಿಂದುವು ABಯನ್ನು 3 : 4 ದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತಿವೆ. PQ = 2 ಸೆಂ. ಮೀ ಆದರೆ AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 5.3 ರಿಯಾಯಿತಿ (Discount) ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಅಂಗಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸೂಪರ್ ಮಾರ್ಕೆಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಸೂಚಿಕೆಯನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಿರುತ್ತಾರೆ. ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಏನೆನ್ನತ್ತಾರೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಅದನ್ನು ವಸ್ತುವಿನ ಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಫ್ಯಾಕ್ಟೋರಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಅವರು ಕೊಟ್ಟ ವಿಷಯ ಪಟ್ಟಿ ಪ್ರಕಾರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ದರ ಪಟ್ಟಿ ಅಥವಾ ಕ್ಯಾಟ್‌ಲಾಗ್ ಅಥವಾ ಮುದ್ರಿತ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ರವಿ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಆ ಪುಸ್ತಕದ ಮೇಲೆ ಮುದ್ರಿಸಿದ್ದ ಬೆಲೆ ₹ 80 ಆ ಅಂಗಡಿಯ ಯಜಮಾನ ಅದರ ಮೇಲೆ 15% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಆ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ರವಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಕೊಡಬೇಕೆ

ಹೀಗೆ ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ ರಿಯಾಯಿತಿ ಎಂದರೆ ಕಡಿತೆ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ವಸ್ತುಗಳ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಕಡಿತೆವನ್ನು ರಿಯಾಯಿತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಇದನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ವಸ್ತುಗಳ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರವಿಗೆ 15% ರಿಯಾಯಿತಿ ಲಭಿಸಿದ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 80 ಆಗಿ ರಿಯಾಯಿತಿ  $\frac{15}{100} \times 80 = ₹ 12$ . ಆದ್ದರಿಂದ ರವಿ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣ ₹ 80 - ₹ 12 = ₹ 68.

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ: 1** ಒಂದು ಸೈಕಲ್ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 3600 ಮತ್ತು ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ₹ 3312 ಆದರೆ ರಿಯಾಯಿತಿ ಮತ್ತು ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**ಪರಿಹಾರ:** ರಿಯಾಯಿತಿ = ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ - ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ

$$= ₹ 3600 - ₹ 3312 = ₹ 288$$

ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ವಸ್ತುಗಳ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು

ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 3600, ಆದರೆ ರಿಯಾಯಿತಿ ₹ 288

ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 100, ಆದರೆ ರಿಯಾಯಿತಿ ಎಷ್ಟು?

$$\text{ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿ} = \frac{288}{3600} \times 100 = 8\%$$



**ಉದಾಹರಣೆ: 2** ಒಂದು ಸೀಲಿಂಗ್ ಫ್ಯಾನ್ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 1600

ಮಾರಾಟಗಾರನು ಅದರ ಮೇಲೆ 6% ರಿಯಾಯಿತಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಅದರ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?





**ಪರಿಹಾರ:**

<p>ರಾಜು ಇದನ್ನು ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದಾನೆ</p> <p>ರಿಯಾಯಿತಿ = ₹ 1600 ರಲ್ಲಿ 6%</p> $= \frac{6}{100} \times 1600 = ₹ 96$ <p>ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ - ರಿಯಾಯಿತಿ ಬೆಲೆ</p> $= ₹ 1600 - ₹ 96$ $= ₹ 1504.$	<p>ಲತಾ ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದಾಳೆ</p> <p>6% ಕಡಿತ ಎಂದರೆ</p> <p>₹ 100 ಕಡಿತದ ನಂತರ ₹ 94</p> <p>ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ₹ 1600 ಕಡಿತದ ನಂತರ?</p> <p>ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = <math>\frac{94}{100} \times 1600 = ₹ 1504</math></p>
--	---



### ಇನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೊಷ್ಟದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ

ವಸ್ತು	ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ (₹ಗಳಲ್ಲಿ)	ರಿಯಾಯಿತಿ%	ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ (₹ಗಳಲ್ಲಿ)
	450	7%	
	560	9%	
	250	5%	
	15000	15%	

**ಉದಾಹರಣೆ: 3** ನೀಲಿಮ ಬಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ಬಟ್ಟೆ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋದಳು. ಅವಳು ಆರಿಸಿದ ಬಟ್ಟೆಗಳ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 1000. ಅಂಗಡಿಯವನು ಮೊದಲು 20% ನಂತರ 5%. ರಿಯಾಯಿತಿ ನೀಡಿದನು. ಅವಳಿಗೆ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ

**ಪರಿಹಾರ:**

ಎಷ್ಟು ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿ ಲಭಿಸಿದೆಯೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಟ್ಟೆಗಳ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ = ₹ 1000.

ಮೊದಲ ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿ = 20%

ಮೊದಲ ಕಡಿತ = 1000 ರಲ್ಲಿ 20%

$$= \frac{20}{100} \times 1000 = ₹ 200$$

ಮೊದಲ ರಿಯಾಯಿತಿಯ ನಂತರ ಬೆಲೆ = ₹ 1000 - ₹ 200

$$= ₹ 800.$$

ಎರಡನೇ ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿ = 5%

ಎರಡನೇ ರಿಯಾಯಿತಿ = 5% of ₹ 800

$$= \frac{5}{100} \times 800 = ₹ 40$$

ಎರಡನೇ ರಿಯಾಯಿತಿಯ ನಂತರ ಬೆಲೆ = ₹ 800 - ₹ 40 = ₹ 760.

ಒಟ್ಟು ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = ₹ 760.

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರಿಯಾಯಿತಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಒಂದೇ ಒಂದು ರಿಯಾಯಿತಿ = ₹ 1000 - ₹ 760 = ₹ 240.

₹ 1000 ಮೇಲೆ ಲಭಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ರಿಯಾಯಿತಿ ₹ 240

$$\text{ಒಂದೇ ಸಲ ಕೊಡಲಾದ ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿ} = ₹ 240 \times \frac{24\cancel{0}}{1\cancel{0}00} \times 100 = 24\%$$

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಅವಳಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿ ಮತ್ತು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಲಭಿಸಿದ ಶೇಕಡಾ ರಿಯಾಯಿತಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ?

**ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ:**



ಪ್ರೀತಿ ಬಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ಬಟ್ಟೆ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋದಳು. ಅವಳು ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ಬಟ್ಟೆಗಳ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 2500. ಅಂಗಡಿಯವನು ಮೊದಲು 5% ರಿಯಾಯಿತಿ ಕೊಟ್ಟನು ಮತ್ತೆ ಕೇಳಿದಾಗ ಮತ್ತೊಂದು ರಿಯಾಯಿತಿ 3% ಕೊಟ್ಟನು. ಅವಳಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ರಿಯಾಯಿತಿ ಶೇಕಡಾ ಎಷ್ಟು? ಅದು 8% ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೇ? ಆಲೋಚಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಮಿತ್ರರೊಡನೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

#### 5.4 ಶೇಕಡಾಗಳಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜಿಸುವುದು

ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೊಂಡುಕೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ರಶೀದಿಯಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆ ₹ 477.80 ಅಂಗಡಿಯವನು ನಿಮಗೆ 15% ರಿಯಾಯಿತಿ ಕೊಟ್ಟರೆ, ನೀವು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿವಿರಿ?

ಬಲ್ಲನ್ನು ಸಮೀಪ ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಅಂದಾಜಿಸಿ. ₹ 477.80 ₹ 480 ಗೆ ಅಂದಾಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ಅದರಲ್ಲಿ 10% ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದು ₹ 48 ಅದರ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ ಅದು ₹ 24. ಆಗ ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಬೆಲೆ ₹ 48 + ₹ 24 = ₹ 72. ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಹಣ ಸುಮಾರು ₹ 410.



### ಇನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ

- (i) ₹ 357.30 ನಲ್ಲಿ 20% ನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಿ (ii) ₹ 375.50 ನಲ್ಲಿ 15% ನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಿ

## 5.5 ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ

ಖರೀದಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಮಾರುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳು (ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ)

ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

- ಸೀತ ಒಂದು ಕುರ್ಚಿಯನ್ನು ₹ 750 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡು ₹ 900 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದಳು.
- ಮೇರಿ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷ 10 ಗ್ರಾಂ. ಬಂಗಾರವನ್ನು ₹ 25000 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡು ಈ ವರ್ಷ ₹ 30,000 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದಳು.
- ರಹೀಮ್ ಒಂದು ಬೈಸಿಕಲನ್ನು ₹ 1600 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡು ಮುಂದಿನ ವರ್ಷದ ನಂತರ ₹ 1400 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು.
- ಅನಿತ ಒಂದು ಕಾರನ್ನು ₹ 4.8 ಲಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡು ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ₹ 4.1 ಲಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಮಾರಿದಳು.
- ಹರಿ ಒಂದು ಮನೆಯನ್ನು ₹ 9 ಲಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡು ಅದರ ದುರಸ್ತಿಗಾಗಿ ₹ 1 ಲಕ್ಷ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು. ಅದನ್ನು ನಂತರ ₹ 4.400 ಲಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಮಾರಿದನು.

ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟ ಎನ್ನುವುದು ಅವುಗಳ ಆಸಲು ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಕೊನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹರಿಗೆ ಬಂದ ಲಾಭವೆಷ್ಟು? ₹ 1.7 ಲಕ್ಷಗಳು ಲಾಭ ಅಲ್ಲವೇ! ಅದನ್ನು ಮಾರುವ ಮುಂಚೆ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಅಲ್ಲದೇ ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಹಣವನ್ನು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ಅಂತಹ ಖರ್ಚನ್ನು ನಾವು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ?

ಕೆಲವು ಸಲ ಅಂಗಡಿಯವರು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಯೊಂದಿಗೆ ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚಗಳು ಎಂದರೆ ಸಾಗಣೆ ವೆಚ್ಚ, ನಿರ್ವಹಣಾ ವೆಚ್ಚ, ಹಮಾಲಿ ವೆಚ್ಚ, ದುರಸ್ತಿ ವೆಚ್ಚ, ದಲ್ಲಾಳಿ ವೆಚ್ಚ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆಸಲು ಬೆಲೆಯಲ್ಲೇ ಸೇರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಆಸಲು ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

### ಉದಾಹರಣೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬಿಡಿ

ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ಆಸಲು ಬೆಲೆಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಬರುತ್ತವೆಯೇ? ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ತುಂಬಾ ಸುಲಭ ಆದರೆ ಅವನ್ನು ಶೇಕಡಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದರೆ ಇನ್ನೂ ಅರ್ಥವಂತವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಲಾಭ ಎನ್ನುವುದು ಆಸಲು ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಿದ ಶೇಕಡಾ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ ಎನ್ನುವುದು ಆಸಲು ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಶೇಕಡಾ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ

**ಉದಾಹರಣೆ: 4** ರಾಧಿಕಾ ಹಳೇ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡು ಮಾರಾಟಮಾಡುವ ವ್ಯಾಪಾರ ಮಾಡುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಒಂದು ಹಳೇ ರೆಪ್ಪಿಜಿರೇಟರ್‌ನ್ನು ₹ 5000 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡು ₹ 100 ಸಾಗಣೆಕೆಗೆ, ₹ 500 ದುರಸ್ತಿಗಾಗಿ ಖರ್ಚುಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ. ಅದನ್ನು ಅವಳು ₹ 7000 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದರೆ

- (i) ಆ ರೆಪ್ಪಿಜಿರೇಟರ್ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ (ii) ಶೇಕಡಾ ಲಾಭವನ್ನು ಅಥವಾ ಶೇಕಡಾನಷ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**

$$(i) \text{ ಒಟ್ಟು ಆಸಲು ಬೆಲೆ} = \text{ಆಸಲು ಬೆಲೆ} + \text{ಸಾಗಣೆ ವೆಚ್ಚ} + \text{ದುರಸ್ತಿ ವೆಚ್ಚ}$$

$$= ₹ (5000 + 100 + 500) = ₹ 5600$$

ಆಗ ಒಟ್ಟು ಆಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 5600.

(ii) ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ₹ 7000. ಇಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ > ಅಸಲು ಬೆಲೆ ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ ಲಾಭ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

$$\text{ಲಾಭ} = \text{ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ} - \text{ಅಸಲು ಬೆಲೆ} = ₹ 7000 - ₹ 5600 = ₹ 1400.$$

$$\text{ಅಸಲು ಬೆಲೆ} ₹ 5600 \text{ ಆದರೆ ಬೆಲೆ} ₹ 1400$$

ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 100, ಆದರೆ ಲಾಭ ಎಷ್ಟು?

$$\text{ಶೇಕಡಾ ಲಾಭ} = \frac{1400}{5600} \times 100 = 25\%$$

**ಉದಾಹರಣೆ 5** ವಿನಯ್ ಒಂದು ಪ್ಲಾಟನ್ನು ₹ 4,50,000 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡು ಅದರ ದುರಸ್ತಿಗಳಿಗಾಗಿ, ಬಣ್ಣ ಹಾಕುವುದಕ್ಕೆ ₹ 10,000 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ನಂತರ ಅದನ್ನು ₹ 4,25,500 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದರೆ ಆತನಿಗೆ ಲಾಭ ವೇ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವೇ ಪ್ರತಿಶತ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:**

ಒಟ್ಟು ಅಸಲು ಬೆಲೆ = ಅಸಲು ಬೆಲೆ + ದುರಸ್ತಿ ವೆಚ್ಚ.

$$= ₹ (4,50,000 + 10,000) = ₹ 4,60,000.$$

ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ₹ 4,25,500 ಇಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ < ಅಸಲು ಬೆಲೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಷ್ಟ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

ನಷ್ಟ = ಅಸಲು ಬೆಲೆ - ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ

$$= ₹ 4,60,000 - ₹ 4,25,500 = ₹ 34,500.$$

ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 4,60,000 ಆದರೆ ನಷ್ಟ ₹ 34,500 ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 100 ಆದರೆ ನಷ್ಟ?

$$\text{ಶೇಕಡಾ ನಷ್ಟ} = \frac{34,500}{4,60,000} \times 100 = 7.5\%$$

**ಉದಾಹರಣೆ 6** ವೆಂಕಣ್ಣ 50 ಡಜನ್ ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ₹ 1250 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡನು. ಆತನು ಸಾಗಣೆ ವೆಚ್ಚಗಳಿಗಾಗಿ ₹ 250 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು. ಐದು ಡಜನ್ ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳು ಕೊಳೆತು ಹೋಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡದೇ ಹೋದನು. ಉಳಿದ ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಡಜನ್ ₹ 35 ಕ್ಕೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರೆ ಆತನಿಗೆ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವೇ? ಪ್ರತಿಶತ ಲಾಭವನ್ನು ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**

ಒಟ್ಟು ಅಸಲು ಬೆಲೆ = ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳ ಅಸಲು ಬೆಲೆ + ಸಾಗಣೆ ವೆಚ್ಚ

$$= ₹ 1250 + ₹ 250 = ₹ 1500.$$

ಮಾರಿದ ಬಾಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳೂ = ಅಸಲು ಬಾಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳು - ಕೆಟ್ಟು ಹೋಗಿದವು.

$$= 50 - 5 = 45$$

$$\text{ಅಸಲು ಬೆಲೆ} = ₹ 35 \times 45 = ₹ 1575$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಸಲು ಬೆಲೆ > ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ಇಲ್ಲಿ ಲಾಭ ಉಂಟಾಗಿದೆ..

$$\text{ಲಾಭ} = \text{ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ} - \text{ಅಸಲು ಬೆಲೆ} = ₹ 1575 - ₹ 1500 = ₹ 75$$

ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 1500 ಕ್ಕೆ ಲಾಭ ₹ 75

ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 100 ಆದರೆ ಲಾಭ?

$$\text{ಶೇಕಡಾ ಲಾಭ} = \frac{75}{1500} \times 100 = 5\%$$

**ಉದಾಹರಣೆ: 7** ಮಲ್ಲಿಗೆ ಎರಡು ಟೇಬಲ್ ಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದು ₹ 3000 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು. ಒಂದು ಟೇಬಲ್ ಮೇಲೆ 20% ಲಾಭ ಇನ್ನೊಂದು ಟೇಬಲ್ ಮೇಲೆ 20% ನಷ್ಟ ಬಂದಿದೆ. ಇಡೀ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಆಗಿರುವ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**

ಮೊದಲ ಟೇಬಲ್ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ= ₹ 3000 ಶೇಕಡಾ ಲಾಭ= 20% ಶೇಕಡಾ ಲಾಭ ಎಂದರೆ ಅಸಲು ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದ ಶೇಕಡಾ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 120 ಆದರೆ ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 100 ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 3000 ಆದರೆ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ? ಅಸಲು ಬೆಲೆ= ₹ 100 × $\frac{3000}{120}$ = ₹ 2500	ಎರಡನೇ ಟೇಬಲ್ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ= ₹ 3000 ಶೇಕಡಾ ನಷ್ಟ= 20% ಶೇಕಡಾ ನಷ್ಟ ಎಂದರೆ ಅಸಲು ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಶೇಕಡಾ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 80 ಆದರೆ ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 100 ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 3000 ಆದರೆ ಅಸಲು ಬೆಲೆ? ಅಸಲು ಬೆಲೆ = ₹ 100 × $\frac{3000}{80}$ = ₹ 3750
---	---

ಎರಡು ಟೇಬಲ್ ಗಳ ಅಸಲು ಬೆಲೆ= ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

ಎರಡು ಟೇಬಲ್ ಗಳ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ= ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000.

ಇಲ್ಲಿ ಅಸಲು ಬೆಲೆ > ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಷ್ಟ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

ನಷ್ಟ= ಅಸಲು ಬೆಲೆ- ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ= ₹ 6250 - ₹ 6000 = ₹ 250

ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 6250 ಆದರೆ ನಷ್ಟ ₹ 250

ಅಸಲು ಬೆಲೆ ₹ 100 ಆದರೆ ನಷ್ಟ ಎಷ್ಟು?

$$\text{ಶೇಕಡಾ ನಷ್ಟ} = 250 \times \frac{100}{6250} = 4\%$$

ಎಂದರೆ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಆತನಿಗೆ 4% ನಷ್ಟ ಬಂದಿದೆ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ:**

ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯವನು ಎರಡು TV ಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದು ₹ 9, 900 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು. ಮೊದಲು TV ಮೇಲೆ 10% ಲಾಭ ಎರಡನೇ TV ಮೇಲೆ 10% ನಷ್ಟ ಬಂದರೆ ಆತನಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವೇ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

### 5.6 ಮಾರಾಟತೆರಿಗೆ / ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (ವ್ಯಾಟ್)

ಸರ್ಕಾರ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (VAT) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ನಮ್ಮಿಂದ ಎಂದರೆ ಗ್ರಾಹಕರಿಂದ ಈ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸಿ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಪಾವತಿಸುತ್ತದೆ. ಆಸಲು ಸರ್ಕಾರ ಈ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಏತಕ್ಕಾಗಿ ವಿಧಿಸುತ್ತದೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಹೀಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಸರ್ಕಾರ ಅನೇಕ ಸಂಕ್ಷೇಮ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಸಾಗಾಣಿಕೆ ಮಾಡಲಾದ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ ಮಾತ್ರವೇ ವಿಧಿಸುತ್ತಾರೆ. ವ್ಯಾಟ್ ಎನ್ನುವುದು ಕೇವಲ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ ಹಾಕಲಾದ ತೆರಿಗೆ. ಇದನ್ನು ಸೇವೆಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕುವುದಿಲ್ಲ. ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಈಗ ವ್ಯಾಟ್ ಆಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದು ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ನಿತ್ಯವಸರ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಟ್ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. 2012 ವರ್ಷದವರೆಗೆ ಬಂಗಾರ, ವಜ್ರ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಮೇಲೆ 1% ಪರಿಶ್ರಮ ಉತ್ಪಾದನೆಗಳ ಬಂಡವಾಳ ಸಾಮಗ್ರಿ, ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ 5%, ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಇತರ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ 14.5% ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರ ನಿರ್ಣಯಿಸಿದೆ.

ಈ VAT ಅನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಆಸಲು ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇನ್ನೂ ಇದು ನಾವು ಕಟ್ಟುವ ರಸೀದಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿರುತ್ತದೆ. VAT ಎನ್ನುವುದು ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಪರಿಷ್ಕೃತ ರೂಪ. VAT ಎನ್ನುವುದು ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲಿನ ಶೇಕಡಾ ಹೆಚ್ಚಳ. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚೀಟಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ VAT ಸೇರಿಸಿದ ಬಿಲ್ಲು

ಗಣಪತಿ ಒಂದು ಔಷಧ ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ತನ್ನ ತಾಯಿಗಾಗಿ ಔಷಧಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಅಂಗಡಿಯವನು ಇವನಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚೀಟಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ಬಿಲ್ಲು ₹ 372.18' ಇದರಲ್ಲಿ 5% VAT ಸೇರಿಸುವುದರ ಮೊದಲು ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

(i) VAT ಸೇರಿಸುವುದರ ಮುನ್ನ ಇದ್ದ ಚೀಟಿಯ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Tax Invoice No. : 20127301549007214		Date : 15-09-2012 20:48:31						
Name : Ganpathi	Age : 35	Gender : Doc:dr	Do.Reg. No. :					
		Cus.ID:20121301549000617 Add: Sainathpura)						
S. Product	Mfgr	Sch	Batch	Exp.	MRP.	Rate	Qty	Amount
1. BETATROP TAB	SUN	H	BSK4198	12-14	5.9	5.9	60	318.60
2. ECOSPRIN 150 MG TAB	USV	H	04004652	05-14	0.4242857	0.38	42	16.04
3. LASIX 40 MG TAB	AVENTIS	H	0212016	03-16	0.44733334	0.40	15	6.04
4. ELDERVIT PLUS CAD	ELDER	C	SE0022008	08-13	2.3333333	2.10	15	31.5
Amount saved : 41.35		VAT ON ₹ 354.45 @ 5% = 17.72		Total : 372.18		Rounded Total : 372.00		

ಬಿಲ್ಲನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಬಿಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = ₹ 354.45 , Vat @ 5% = ₹ 17.72

**ಉದಾಹರಣೆ 8** ಒಂದು ಶೂಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 450. ಇದರ ಮೇಲೆ 6% ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ವಿಧಿಸಿದರೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಬಿಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ₹ 100 ಮೇಲೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ₹ 6.

₹ 450 ಮೇಲೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ಎಷ್ಟು?

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ = ₹  $\frac{6}{100} \times 450 = ₹ 27.$

ಬಿಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = ವಸ್ತುವನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ + ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ = ₹ 450 + ₹ 27 = ₹ 477.



## 5.6 ವಸ್ತುವಿನ ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ (Goods and Service Tax - GST)

ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರವು ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ಮತ್ತು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ಬದಲಿಗೆ 01/07/2017 ರಿಂದ ವಸ್ತುವಿನ ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ(GST) ಯನ್ನು ಜಾರಿಗೆ ತಂದಿದೆ.

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದ ಶುಲ್ಕ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ(GST) ಎನ್ನುವರು. ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರವು ಹೆಚ್ಚು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ 3%, 5%, 12%, 18% ಮತ್ತು 28% ರ ವರೆಗೆ ವಿವಿಧ ದರಗಳಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು(GST) ನಿರ್ಣಯಿಸಿದೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಬಂಗಾರ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಬಾಳುವ ಹರಳುಗಳ ಮೇಲೆ 3%, ನಿತ್ಯೋಪಯೋಗಿ ವಸ್ತುಗಳು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಶೇಕಡಾ ದರದಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಸೇವೆ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು(GST) ವಿಧಿಸಿದೆ.

ಉದಾ 9: ವಿಗ್ನೇಷ್ ಕಿರಾಣಿ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋಗಿ ಸಾಬೂನಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಅಂಗಡಿಯವನು ಕೊಟ್ಟ ದರ ಪಟ್ಟಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ. ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ ರೂ. 2200 ಇದರಲ್ಲಿ 18% ವಸ್ತು ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ(GST) ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ GST ಸೇರಿಸುವ ಮೊದಲು ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ :

ವಸ್ತುವಿನ ಹೆಸರು	ಪರಿಮಾಣ	ದರ	ಮೊತ್ತ
ಸಬ್ಬು	10	200	2000
ಸರ್ಫ್‌ಪ್ಯಾಕೆಟ್	2	100	200
CGST		@ 9%	198
SGST		@ 9%	198
ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ			2596

ಆದ್ದರಿಂದ GST ಸೇರಿಸಿದ ನಂತರ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = ರೂ. 2596.

GST ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ

ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ ರೂ. 2200, GST @ 18% ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಮಾರಾಟದ ತೆರಿಗೆ (CGST 9% ಮತ್ತು SGST 9%)

CGST =  $2200 \times \frac{9}{100} = \text{Rs.} 198$  (ಕೇಂದ್ರ GST)

SGST =  $2200 \times \frac{9}{100} = \text{Rs.} 198$  (ರಾಜ್ಯ GST)

ಒಟ್ಟು ಸೇವೆ ತೆರಿಗೆ = ರೂ. 396

GST ಸೇರಿಸುವ ಮೊದಲು ವಸ್ತುಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ =  $2200 - 396 = \text{Rs.} 1804$

ಉದಾ 10: ಒಂದು ಜೊತೆ ಬೂಟುಗಳು ಬೆಲೆ ರೂ. 1000, ಅದರ ಮೇಲೆ 5% GST ವಿಧಿಸಿದರೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

ಸಾಧನೆ: ರೂ. 100 ಮೇಲೆ GST ರೂ. 5

ರೂ. 1000 ಮೇಲೆ GST ಎಷ್ಟು?

$$\text{GST} = \frac{5}{100} \times 1000 = 50$$

ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = ವಸ್ತುವಿನ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ + ವಸ್ತು ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ =  $1000 + 50 = \text{ರೂ.} 1050$



### ಆನ್ಯಾಸ - 5.2

- 2012 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅಂತರ್ ಜಾಲ (Internet) ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ 36.4 ಕೋಟಿಗಳಾಗಿ ಅಂದಾಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬರುವ ಹತ್ತು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 125% ಹೆಚ್ಚಾಗಬಹುದೆಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ 2022 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿದ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ಮನೆ ಯಜಮಾನ ತನ್ನ ಮನೆಯ ಬಾಡಿಗೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ 5% ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾನೆ. ಪ್ರಸ್ತುತವಾಗಿ ಆ ಮನೆಯ ಬಾಡಿಗೆ ₹ 2500 ಆದರೆ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಮನೆಯ ಬಾಡಿಗೆ ಎಷ್ಟು?
3. ಒಂದು ಕಂಪೆನಿ ಷೇರಿನ ಬೆಲೆ ಸೋಮವಾರದ ದಿನ ₹ 7.50. ಮಂಗಳವಾರದ ದಿನ ಅದು 6% ಬೆಳೆದು, ಬುಧವಾರದ ದಿನ 1.5% ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಮತ್ತೆ ಗುರುವಾರದ ದಿನ 2% ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಶುಕ್ರವಾರದ ದಿನ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ಆ ಷೇರಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
4. ಬಹಳ ಜೆರಾಕ್ಸ್ ಯಂತ್ರಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿ ಸಲ ಪರಿಮಾಣ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬಹುದು. ರೇಷ್ಮೆ ತನ್ನ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ 2 ಸೆ.ಮೀ., 4 ಸೆ.ಮೀ. ಚಿತ್ರದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ. ಅವಳು ಜೆರಾಕ್ಸ್ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ 150% ಒತ್ತಿ ಅದರ ಪ್ರತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ. ಆಗ ಅವಳಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಪ್ರತಿಯಲ್ಲಿನ ಚಿತ್ರದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 150 ಅದರ ಮೇಲೆ 15% ರಿಯಾಯಿತಿ ಲಭಿಸಿದರೆ ಆ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು?
6. ಒಂದು ಕಾಣಿಕೆಯ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ₹ 176 ಅದನ್ನು ಅಂಗಡಿಯವನು ನಿಮಗೆ ₹ 165 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದರೆ ನಿಮಗೆ ಲಭಿಸಿದ ರಿಯಾಯಿತಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯವನು ಪ್ರತಿ ಬಲ್ವಾ ₹ 10 ರಂತೆ 200 ಬಲ್ವಾಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ 5 ಬಲ್ವಾಗಳು ಸುಟ್ಟುಹೋಗುವುದರಿಂದ ಹೊರಗೆ ಬಿಸಾಕಿದನು. ಉಳಿದ ಬಲ್ವಾಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದು ₹ 12 ರಂತೆ ಮಾರಿದರೆ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವೇ? ಪ್ರತಿಶತವೆಷ್ಟು?
8. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಅವಶ್ಯಕವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ತುಂಬಿರಿ.

ಕ್ರ.ಸಂಖ್ಯೆ	ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ (C.P.)	ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಖರ್ಚುಗಳು	ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ (S.P.)	ಲಾಭ	ನಷ್ಟ	ಶೇಕಡಾ ಲಾಭ	ಶೇಕಡಾ ನಷ್ಟ
1	₹ 750	₹ 50		₹ 80			
2	₹ 4500	₹ 500			₹ 1,000		
3	₹ 46,000	₹ 4000	₹ 60,000				
4	₹ 300	₹ 50				12%	
5	₹ 330	₹ 20					10%

9. ಒಂದು ಟೇಬಲ್ ನ್ನು ₹ 2,142 ಕ್ಕೆ ಮಾರಲಾಗಿ 5% ಲಾಭ ಬಂದಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ 10% ಲಾಭ ಬರಬೇಕೆಂದರೆ ಅದನ್ನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಮಾರಬೇಕು?
10. ಗೋಪಿ ಒಂದು ಗಡಿಯಾರವನ್ನು 12% ಲಾಭಕ್ಕೆ ಇಬ್ಬರಿಗೂ ಮಾರಿದನು. ಇಬ್ಬರಿಗೂ ಅದನ್ನು 5% ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ಜಾನ್ ಗೆ ಮಾರಿದನು. ಜಾನ್ ಆ ಗಡಿಯಾರಕ್ಕೆ ₹ 1,330 ಪಾವತಿಸಿದರೆ ಗೋಪಿ ಆ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಎಷ್ಟಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು?
11. ಮಧು ಮತ್ತು ಕವಿತ ಒಂದು ಹೊಸ ಮನೆಯನ್ನು ₹ 3,20,000 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡರು. ಆರ್ಥಿಕ ತೊಂದರೆಗಳಿಂದ ಮನೆಯನ್ನು ₹ 2,80,000 ಗೆ ಮಾರಿದರೆ,  
(a) ಅವರಿಗೆ ಆದ ನಷ್ಟ (b) ಶೇಕಡಾನಷ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ಒಂದು ಹಳೇ ಕಾರನ್ನು ಕೊಂಡು ಮಾರುವ ಅಂಗಡಿಯವನು ಒಂದು ಹಳೇ ಕಾರನ್ನು ₹ 1,50,000 ಗೆ ಕೊಂಡು ಅದರ ದುರಸ್ತಿಗೆ ಮತ್ತು ಬಣ್ಣ ಹಾಕುವುದಕ್ಕೆ ₹ 20,000 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು. ಆತ ಆ ಕಾರನ್ನು ₹ 2,00,000 ಗೆ ಮಾರಿದ ಆತನಿಗೆ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವೇ? ಪ್ರತಿಶತವೆಷ್ಟು?

13. ಲಲಿತ ತನ್ನ ಹುಟ್ಟು ಹಬ್ಬವನ್ನು ಸ್ನೇಹಿತರೊಡನೆ ಆಚರಿಸಲು ಹೋಟೆಲ್ ನಿಂದ ಪಾರ್ಲೆಲ್ ತರಿಸಿದಳು. 5% GSTನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ₹ 1,450 ಬಿಲ್ಲು ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಹೋಟೆಲ್‌ನವರು ಬಿಲ್ ಮೊತ್ತದ ಮೇಲೆ 8% ರಿಯಾಯಿತಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಲಲಿತ ಹೋಟೆಲ್ ಅವರಿಗೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
14. ಕೆಳಗೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ GST ಸೇರಿಸಿ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. GST ಸೇರಿಸುವುದರ ಮುನ್ನ ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರ.ಸಂಖ್ಯೆ	ವಸ್ತುವು	GST %	ಬಿಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ ( ₹ )	ಅಸಲು ಬೆಲೆ ( ₹ )
(i)	ವಜ್ರ	3%	₹ 10,300	
(ii)	ಪ್ರೆಷರ್ ಕುಕ್ಕರ್	12%	₹ 3,360	
(iii)	ಮುಖಕ್ಕೆ ಹಚ್ಚುವ ಪೌಡರ್	28%	₹ 256	

15. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ 8.5% ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಅಸಲು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (i) ಒಂದು ಟವಲ್ ₹ 50      (ii) ಎರಡು ಸೋಪ್‌ಗಳು ಒಂದೊಂದು ₹ 35 .
16. ಒಂದು ಸೂಪರ್ ಬಜಾರ್‌ನಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು 4% ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಅಂದಾಜಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕ ವಿಲ್ಲದೇ 'n' ರೂಪಾಯಿಗಳು ಆಗುವಂತೆ ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು ಪೈಸೆಗಳಿಂದ ನಿರ್ಣಯಿಸಿದ್ದಾರೆ. 'n' ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಯಾದರೆ 'n' ಬೆಲೆ ಕನಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಇರಬಹುದು?

### 5.7 ಚಟುವಟಿಕೆ

ಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುವುದು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾವು ಬ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಪ್ರೋಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಣವನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟಾಗ ಕೊಡುತ್ತಾರೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಯಾರಾದರೂ ಹಣವನ್ನು ಸಾಲವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಲೇವಾದೇವಿಗಾರನಿಗೆ ಸಾಲ ಪಡೆದವನು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಾನೆ. ಬಡ್ಡಿ ಎಂದರೆ ಕೆಲ ಕಾಲಾವಧಿಯ ನಂತರ ಅಸಲಿನೊಂದಿಗೆ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಹಣ.

ಆದರೆ ಈ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾರೆ? ಅಸಲಿನ ಮೇಲೆ ಏಕರೂಪವಾಗಿ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಧಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದ ಹಣವನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆ? ಅದನ್ನು ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಅಲ್ಲವೇ! ಇದು ಕೂಡ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಅಸಲಿನ ಮೇಲೆ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಶೇಕಡಾನೇ ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ: 9** ₹ 2500 ನ್ನು 12% ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಂತೆ 3 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಮೇಲೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು 3 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಗೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ P = ₹ 2500, T = 3 ವರ್ಷಗಳು, R = 12 %

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{PTR}{100}$$

$$= \frac{2500 \times 3 \times 12}{100}$$

3 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿ = ₹ 900

$$3 \text{ ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಗೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} = \text{ಅಸಲು} + \text{ಬಡ್ಡಿ} \\ = ₹ 2500 + ₹ 900 = ₹ 3400.$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ನಾವು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು

$$\text{ಮೊತ್ತ} = \text{ಅಸಲು} + \text{ಬಡ್ಡಿ} = P + \frac{P \times T \times R}{100} = P \left( 1 + \frac{T \times R}{100} \right)$$

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } t = 1 \text{ ವರ್ಷ, ಮೊತ್ತ } A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)$$



### ಇನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ:

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತುಂಬಿ:

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಅಸಲು (P) ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ	ಕಾಲಾವಧಿ (T) ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ	ಬಡ್ಡಿದರ %ಗಳಲ್ಲಿ	ಬಡ್ಡಿ (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ
1	3000	3	6	
2		2	5	50
3	1875		12	675
4	1080	2.5		90

ರಮೇಶ ₹100 ಗಳನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 10% ಬಡ್ಡಿದರದಂತೆ ಸೀನು ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು. 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಸಾಲ ತೀರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸೀನು ಹತ್ತಿರ ಹೋಗಿ ₹ 120 ನ್ನು ಕೊಟ್ಟನು. ಸೀನು ಆಗ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪಾಯಿ ಕೊಡಬೇಕೆಂದು ಕೇಳಿದಾಗ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಲ್ಲಿ ಬಂದಿದೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಇಬ್ಬರೂ ಅವರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ರಮೇಶ್ ಮಾಡಿದ ವಿಧಾನ			ಸೀನು ಮಾಡಿದ ವಿಧಾನ		
1ನೇ ವರ್ಷ	ಅಸಲು	₹ 100	1ನೇ ವರ್ಷ	ಅಸಲು ಬಡ್ಡಿ	₹ 100
	ಬಡ್ಡಿ ದರ @10%	₹ 10		ಬಡ್ಡಿ ದರ @10%	₹ 10
	ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ	₹ 110		ಒಟ್ಟು ಹಣ	₹ 110
2ನೇ ವರ್ಷ	ಅಸಲು ಬಡ್ಡಿ	₹ 100	2ನೇ ವರ್ಷ	ಅಸಲು ಬಡ್ಡಿ	₹ 110
	ಬಡ್ಡಿ ದರ @10%	₹ 10		ಬಡ್ಡಿ ದರ @10%	₹ 11
	2ನೇ ವರ್ಷಾಂತಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಹಣ	= ಅಸಲು + 1ನೇ ವರ್ಷ ಬಡ್ಡಿ + 2ನೇ ವರ್ಷ ಬಡ್ಡಿ = 100+10+10 = ₹120		2ನೇ ವರ್ಷಾಂತಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಹಣ	₹ 121

ಈ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ₹1 ಏತಕ್ಕಾಗಿ ಬಂದಿದೆ? ಜಾಗ್ರತೆಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದಕ್ಕೆ ರಮೇಶ್ ಅಸಲು ₹ 100 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸೀನು ಅಸಲು ₹ 110 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ರಮೇಶ್ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದಾಗ ಬಂದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಸೀನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದಾಗ ಬಂದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಇಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಅಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಬಂದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ಅದನ್ನು ಅಸಲಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಕಟ್ಟುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನೇ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಎಂದರೆ ಬಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಬಡ್ಡಿ. ನೀವು ಈ ಎರಡು ಬಗೆಯ ಬಡ್ಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಯಾವಾಗ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೀರಾ?

### 5.8 ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸೀನು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. 1.2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು ಸುಲಭ ಆದರೆ ವರ್ಷಗಳು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಇದೇ ವಿಧಾನದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದೇ? ಇದಕ್ಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸುಲಭವಾದ ಪದ್ಧತಿ ಇದೆಯೇ? ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಒಂದು ಸೂತ್ರದ ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

$T = 1$  ಒಂದು ವರ್ಷ ಆದಾಗ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯಿಂದ ಮೊತ್ತಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ  $(A) = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)$

$P_1 = ₹ 10,000$  ಮತ್ತು  $R =$  ವರ್ಷಕ್ಕೆ 12% ಎಂದು ಕೊಂಡಾಗ

ಸೀನು ಮಾಡಿದ ವಿಧಾನ			ಅದೇ ಪದ್ಧತಿಯ ಸಾಧರಣೀಕರಣ ಮಾಡುವುದು		
1 ನೇ ವರ್ಷ	ಅಸಲು $P_1$	₹ 10,000		ಅಸಲು	$P_1$
	ಮೊತ್ತ $A_1$	$10000 \left( 1 + \frac{12}{100} \right)$ $= 10000 \left( \frac{112}{100} \right)$ $= ₹ 11,200$	1 ನೇ ವರ್ಷ	ಮೊತ್ತ $A_1$	$A_1 = P_1 \left( 1 + \frac{R}{100} \right)$
2 ನೇ ವರ್ಷ	ಅಸಲು $P_2$	₹ 11,200	2 ನೇ ವರ್ಷ	ಅಸಲು	$P_2 = P_1 \left( 1 + \frac{R}{100} \right)$
	ಮೊತ್ತ $A_2$	$11200 \left( 1 + \frac{12}{100} \right)$ $= 11200 \left( \frac{112}{100} \right)$ $= ₹ 12,544$		ಮೊತ್ತ $A_2$	$A_2 = P_2 \left( 1 + \frac{R}{100} \right)$ $= P_1 \left( 1 + \frac{R}{100} \right) \left( 1 + \frac{R}{100} \right)$ $= P_1 \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^2$

ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ 'n' ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರ  $A_n = P_1 \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$

ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಮೊತ್ತ  $A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$  ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ನಾವು 'n' ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಗೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತ ಮಾತ್ರವೇ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯಿಂದ ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ? ಇದು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಂದ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಅಸಲನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯ ಮೊತ್ತ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore C.I = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n - P$$

ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ, ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನೋ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಕಾಲಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 10 :** ₹ 5000 ಅನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 8% ಬಡ್ಡಿ ಧರದಂತೆ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಉಳಿತಾಯ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಬರುವ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**ಪರಿಹಾರ:**  $P = ₹ 5000$ ;  $R = 8\%$  ಮತ್ತು  $n = 2$  ವರ್ಷಗಳು

$$\begin{aligned} A &= P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n \\ &= 5000 \left( 1 + \frac{8}{100} \right)^2 \\ &= 5000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = ₹ 5832 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ} &= \text{ಮೊತ್ತ} - \text{ಅಸಲು} \\ &= ₹ 5832 - ₹ 5000 \\ &= ₹ 832 \end{aligned}$$



### ಇನ್ನುಮಾಡಿ:

1. ₹ 20 000 ಮೇಲೆ 5% ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ 6 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯಕ್ಕೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಬರುವ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಎಷ್ಟು?
2. ₹ 12600 ಮೇಲೆ 10% ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯಕ್ಕೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಬರುವ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಎಷ್ಟು?

### 5.9 ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಲ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಎಂದು ಇದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಎನಾದರೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಇದೆಯಾ? ಇದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ (6 ತಿಂಗಳಿಗೆ), ತ್ರೈಮಾಸಿಕವಾಗಿ ಕೂಡ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಲ ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ಕಾಲವನ್ನು ಎನ್ನತ್ತಾರೋ ನಿಮಗೆ ತೋತ್ತೇ? ಇದನ್ನು ನಾವು ಬಡ್ಡಿ ಪರಿವರ್ತನ ಕಾಲ (Conversion Period) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ನಾವು 6 ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪರಿವರ್ತನಾ ಅವಧಿಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಆಗ ಬಡ್ಡಿ ದರವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿ ದರದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಪರಿವರ್ತನಾ ಅವಧಿ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಎರಡಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ₹ 1000 ಮೇಲೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ ದರ 10% ನಂತೆ ಅರ್ಧವರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದರೆ 1 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬರುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು 6 ತಿಂಗಳಿಗೊಂದು ಸಲ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1 ವರ್ಷದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ 2 ಪರಿವರ್ತನಾ ಅವಧಿಗಳಿವೆ. ಎಂದರೆ  $n=2$

$$\text{ಆಗ ಅರ್ಧವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ ದರ} = \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$$

$$A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$$

$$A = 1000 \left( 1 + \frac{5}{100} \right)^2$$

$$= 1000 \left( \frac{105}{100} \right)^2$$

$$= ₹ 1102.50$$

$$\text{ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ} = A - P = 1102.50 - 1000 = ₹ 102.50$$



### ಇನ್ನುವಾಣಿ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಪರಿವರ್ತನಾ ಅವಧಿಗಳು, ಬಡ್ಡಿ ದರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

1. ಸ್ವಲ್ಪಮೊತ್ತವನ್ನು 8% ಬಡ್ಡಿ ದರದಂತೆ ಪ್ರತಿ 6 ತಿಂಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕವಿಡುತ್ತಾ  $1\frac{1}{2}$  ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಾಲತಂದನು.
2. ಸ್ವಲ್ಪಮೊತ್ತವನ್ನು 4% ಬಡ್ಡಿ ದರದಂತೆ ಪ್ರತಿ 6 ತಿಂಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕವಿಡುತ್ತಾ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಾಲತಂದನು.

### ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿಬರೆಯಿರಿ:



ಪ್ರತಿ ಮೂರು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದರೆ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ? ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪರಿವರ್ತನಾ ಅವಧಿಗಳು ಬರುತ್ತವೆ? ಮೂರು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ದರ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿ ದರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟನೇ ಭಾಗ? ನಿಮ್ಮ ಮಿತ್ರರೊಡನೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ 12:** ₹ 12000 ಗಳನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 10% ಬಡ್ಡಿದರದಂತೆ 6 ತಿಂಗಳಿಗೊಂದು ಸಲ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಾಲ ತಂದು  $1\frac{1}{2}$  ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು 6 ತಿಂಗಳಿಗೊಂದು ಸಲ ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ವಿಧಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ  $1\frac{1}{2}$  ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಅವಧಿ 3, ಆಗ  $n = 3$

$$\text{ಬಡ್ಡಿದರ} = \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$$

$$A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$$

$$A = 12000 \left( 1 + \frac{5}{100} \right)^3$$

$$= 12000 \left( \frac{105}{100} \right)^3$$

$$= ₹ 13891.50$$

$$\begin{aligned} \text{ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ} &= A - P \\ &= 13891.50 - 12000 \\ &= ₹ 1891.50 \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 13:** ಯಾದಯ್ಯ ತನ್ನ ಕುಟುಂಬ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಾಗಿ ₹ 5120 ಗಳನ್ನು  $12\frac{1}{2}\%$  ಬಡ್ಡಿ ಯಿಂದ ವರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಾಲ ತಂದನು. 2 ವರ್ಷ 9 ತಿಂಗಳ ನಂತರ ಅತನು ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಟ್ಟಬೇಕು? ಅತನು ಕಟ್ಟಿದ ಬಡ್ಡಿ ಹಣ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ** ರೇಷ್ಮೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದಳು. ಅವಳು ಮೊದಲು 2 ವರ್ಷ 9 ತಿಂಗಳನ್ನು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಳು.

$$2 \text{ ವರ್ಷ } 9 \text{ ತಿಂಗಳು} = 2 \frac{9}{12} \text{ ವರ್ಷಗಳು} = 2 \frac{3}{4} \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$

ಅವಳಿಗೆ ತಿಳಿದಿದ್ದ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದಳು.

$$A = 5120 \left( 1 + \frac{25}{200} \right)^{2\frac{3}{4}}$$

ಇಲ್ಲಿಗೆ ಅವಳ ಲೆಕ್ಕ ನಿಂತು ಹೋಯಿತು. ಅವಳು ತನ್ನ ಶಿಕ್ಷಕಿಯನ್ನು ಘಾತಾಂಕದಲ್ಲಿ ಭಿನರಾಶಿ ಇದ್ದರೆ ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೇಳಿದಳು? ಶಿಕ್ಷಕಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಎಂದರೆ 2 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಚಕೆಬಡ್ಡಿ ಸೂತ್ರ ಪ್ರಕಾರ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಆ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅಸಲಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು  $\frac{3}{4}$  ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕೆಂದು ಸಲಹೆ ಕೊಟ್ಟಳು.



$$\text{ಆಗ } A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$$

$$A = 5120 \left( 1 + \frac{25}{200} \right)^2$$

$$= 5120 \left( \frac{225}{200} \right)^2$$

$$= ₹ 6480$$

$$\text{ಉಳಿದ 9 ತಿಂಗಳ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ} = 6480 \times \frac{25}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{100} = ₹ 607.50.$$

$$\begin{aligned} \text{ಆಗ ಯಾದಯ್ಯ 2 ವರ್ಷ 9 ತಿಂಗಳ ನಂತರ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತ} \\ = 6480 + 607.50 = ₹ 7087.50 \end{aligned}$$

$$\text{ಅದ್ದರಿಂದ ಕಟ್ಟಿದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ} = 7087.50 - 5120 = ₹ 1967.50$$

### 5.10 ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು

ನಾವು ಈ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು? ಕೇವಲ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವುದಕ್ಕಲ್ಲದೆ, ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

- ಜನ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.
- ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಹಣಕಾಸುಗಾರರವರ ರೇಟು ಗೊತ್ತಾದರೆ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಲು.
- ವರ್ಷದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿರುವಾಗ ಇದ್ದರೆ ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 14:** ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆ 6250. ಆ ಗ್ರಾಮದ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಪ್ರಮಾಣ ವರ್ಷಕ್ಕೆ 8% ಆಗಿ ಗುರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಗ್ರಾಮದ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ  $P = 6250$        $R = 8\%$        $T = 2$  ವರ್ಷಗಳು

$$2 \text{ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಗ್ರಾಮ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆ } A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$$

$$A = 6250 \left( 1 + \frac{8}{100} \right)^2$$

$$= 6250 \left( \frac{108}{100} \right)^2$$

$$= 7290$$

**ಉದಾಹರಣೆ 15** ಒಂದು ರಬ್ಬರ್ ಚೆಂಡನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಎತ್ತರದ ಮೇಲಿನಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಬಿಟ್ಟರೆ ಅದು ಪ್ರತಿ ಸಲ ಮೊದಲು ಪುಟಿದ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ 90% ಮಾತ್ರವೇ ಮೇಲಕ್ಕೂ ಪುಟಿಯುತ್ತದೆ. ಅದು ಒಂದು 25 ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಭವನದ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಹಾಕಲಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಲ ಬಿದ್ದು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪುಟಿದರೆ ಅದು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದ ವರೆಗೆ ಪುಟಿಯಬಹುದು.

**ಪರಿಹಾರ:** ಬಾಲ್ ಮೊದಲ ಸಲ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪುಟಿದರೆ ಮೊದಲು ಹಾಕಿದ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ 90% ಮಾತ್ರವೇ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪುಟಿಯುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಪ್ರತಿಸಲ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪುಟಿದರೆ 10% ಎತ್ತರ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ  $R = -10\%$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

$P = 25$  ಮೀ ಮತ್ತು  $n = 2$

ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಲ ಬಿದ್ದು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಪುಟಿದರೆ ಅದು ಸೇರುವ ಎತ್ತರ

$$A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$$

$$A = 25 \left( 1 - \frac{10}{100} \right)^2$$

$$= 25 \left( \frac{90}{100} \right)^2$$

$$= 20.25 \text{ ಮೀಟರ್ ಗಳು.}$$



### ಆನ್ಯಾಸ - 5.3

1. ಸುಧಾಕರ್ ತನ್ನ ಮನೆಯ ದುರಸ್ತಿಗಾಗಿ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ₹ 15 000 ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಅತನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 9% ಸರಳ ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ 8 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು. ಅತನು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಹಿಂದರಿಗಿಸಬೇಕಾದ ಹಣ ವೆಷ್ಟು?
2. ಒಂದು ಟೆಲಿವಿಜನ್ ನನ್ನು ₹ 21000 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡನು. ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅದರ ಬೆಲೆ 5% ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ (ವಸ್ತುಗಳ ಬಳಕೆ, ಬಳಸಿದ ಸಮಯದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು) ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಆ ಟೆಲಿವಿಜನ್ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
3. ₹ 8000 ಗಳ ಮೇಲೆ 5% ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷಕ್ಕೂ ಮೈ ಬಡ್ಡಿ ಕಟ್ಟಿದರೆ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ₹ 6500 ಗಳ ಮೇಲೆ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ 5% ನಂತೆ ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ 6% ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಬಡ್ಡಿ ಕಟ್ಟಿದರೆ. 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಪ್ರತಿಭ ಒಂದು ಫೈನಾನ್ಸ್ ಕಂಪನಿಯಿಂದ ಮೊದಲ ಕಾರನ್ನು ₹ 47000 ಕ್ಕೆ 17% ಬಡ್ಡಿದರದಿಂದ 5 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಳು. ಆದರೆ (a) ಅವಳು ಫೈನಾನ್ಸ್ ಕಂಪನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಕಟ್ಟಬೇಕು. (b) ಆ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಮಾನ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಬೇಕೆಂದರೆ ಅವಳು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಎಷ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಟ್ಟಬೇಕು.

6. 2011ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಹೈದರಾಬಾದ್ ನಗರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ 68,09,000. ಅದು ಪ್ರತಿವರ್ಷ 4.7% ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ. 2015ನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಹೈದರಾಬಾದ್ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
7. ₹ 10000 ಗಳಿಗೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ  $8\frac{1}{2}\%$  ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಹಣ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ ವರ್ಷ 3 ತಿಂಗಳ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಆರಿಫ್ ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ₹ 80,000 ಗಳನ್ನು 10% ಬಡ್ಡಿದರದಂತೆ ಸಾಲ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡನು. (i) ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಮತ್ತು (ii) ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟುವ ಅವಧಿಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು,  $1\frac{1}{2}\%$  ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟಿದರೆ ಆ ಎರಡು ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ನಾನು ಪ್ರಸಾದ್ ಹತ್ತಿರದಿಂದ ₹ 12000 ವನ್ನು 6% ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಗೆ 2 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು. ನಾನು ಅದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 6% ಬಡ್ಡಿದರದಂತೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಹಣವೆಷ್ಟು?
10. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿರುವ ರೇಟು ಗಂಟೆಗೆ 2.5% ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾ ಸಂಖ್ಯೆ 5,06,000 ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಆ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
11. ಕಮಲ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಸ್ಟೂಟರ್ ಕೊಳ್ಳಲು ₹ 26400 ಗಳನ್ನು 15% ಬಡ್ಡಿದರಕ್ಕೆ ವರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಕಟ್ಟುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಳು. 2 ವರ್ಷ 4 ತಿಂಗಳ ನಂತರ ಸಾಲವೆಲ್ಲಾ ತೀರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅವಳು ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ಭಾರತಿ ₹ 12500 ಅನ್ನು 12% ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ 3 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಸಾಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಳು. ಮಾಧುರಿ ಅದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅದೇ ಕಾಲಕ್ಕೆ 10% ಬಡ್ಡಿಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಲ ತಂದಳು. ಈ ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿಯೂ ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟುತ್ತಾರೆ? ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟುತ್ತಾರೆ?
13. ₹ 10000 ಬೆಳೆ ಬಾಳುವ ಯಂತ್ರ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಬೆಲೆ 5% ನಂತೆ ತಗ್ಗಿಸಲಾಗಿದೆ. 1 ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
14. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ ಪ್ರಸ್ತುತ ಜನಸಂಖ್ಯೆ 12 ಲಕ್ಷ. ವರ್ಷಕ್ಕೆ 4% ನಂತೆ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದರೆ 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಪಟ್ಟಣದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
15. ₹ 1000 ಗಳನ್ನು 10% ಬಡ್ಡಿದರ ದಂತೆ ತ್ರೈಮಾಸಿಕ ಬಡ್ಡಿ ವಿಧಾನದಿಂದ 1 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



### ನಿನ್ನಿನಲ್ಲಿ ಬಳಸಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು:

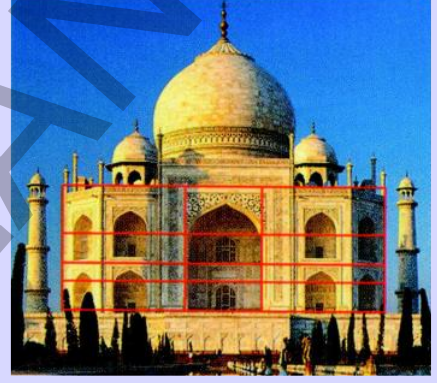
1. ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಆ ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳ ಪೂರ್ವ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.  $a:b, c:d$  ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ಮಿಶ್ರಮಾನುಪಾತ  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  ಅಥವಾ  $ac:bd$ .
2. ಶೇಕಡಾ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 100 ರಿಂದ ಹೋಲಿಸುವುದು. ಶೇಕಡಾ ಎಂದರೆ ಪ್ರತಿ ನೂರಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿ ನೂರರಲ್ಲಿ ಎಂದರ್ಥ,  $100\% = \frac{100}{100}$  ಶೇಕಡಾ ಎನ್ನುವುದು 100 ಭೇದವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.
3. ರಿಯಾಯಿತಿ ಎಂದರೆ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಕಡಿತಮೆಯಾದ ಶೇಕಡ. ವಸ್ತುವಿನ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಕಡಿತವನ್ನು ಕಡಿತಮೆಯಾದ ಅಥವಾ ರಿಯಾಯಿತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ವಸ್ತುವಿನ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಧರಪಟ್ಟಿಯ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.
4. ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾರೆ. ಲಾಭ ಎಂದರೆ ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಬಂದ ಶೇಕಡಾ ಹಣ, ನಷ್ಟ ಎನ್ನುವುದು ನಮೂದಿತ ಬೆಲೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಬಂದ ಶೇಕಡಾ.
5. VAT ಅನ್ನು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿ (Bill) ಸೇರಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾರೆ. VAT ಎನ್ನುವುದು ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲಿನ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರತಿಶತ ಅಥವಾ ಶೇಕಡ.
6. ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುವುದು ಅಸಲಿನ ಮೇಲಿನ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರತಿಶತ ಅಥವಾ ಶೇಕಡ.
7. ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ (I) =  $\frac{P \times T \times R}{100}$  ಇದರಲ್ಲಿ P = ಅಸಲು T = ಕಾಲ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) R = ಬಡ್ಡಿದರ
8. ಮೊತ್ತ = ಅಸಲು + ಬಡ್ಡಿ =  $P + \frac{P \times T \times R}{100} = P \left( 1 + \frac{T \times R}{100} \right)$
9. ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುವುದು ಅಸಲು ಮತ್ತು ಅಸಲಿನ ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದ ಬಡ್ಡಿ.
10. ವರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಬಡ್ಡಿ ಕಟ್ಟುವ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 'n' ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಅಗುವ ಮೊತ್ತ  $A = P \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^n$
11. ಎಷ್ಟುಕಾಲದ ನಂತರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿಗೆ ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೋ ಅದನ್ನು ಪರಿವರ್ತನಾ ಅವಧಿಗಳು ಎನ್ನುವರು. 6 ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾಗ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪರಿವರ್ತನಾ ಅವಧಿಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿ ದರವು ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿದರದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

### ನಿಮಗಿಂತಿತ್ತೇ?

ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಕಾರರು ವಾಸ್ತು ಶಿಲ್ಪಿಗಳ (architects) ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಆಕೃತಿ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಇಂಪಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಇಂತಹ ಆಯತದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳ ಅನುಪಾತ ಸುಮಾರು **1.615:1**. ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಗೋಲ್ಡನ್ ರೇಷಿಯೋಗೆ ತುಂಬ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದೆ. ಕ್ರಿ.ಪೂ 5ನೇ ಶತಾಬ್ದದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್‌ನಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಪಾರ್ಥೆನಾನ್ ದೇವಾಲಯ ಈ ಗೋಲ್ಡನ್ ರೇಷಿಯೋಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಇರುವ ತಾಜ್‌ಮಹಲ್ ಕೂಡ ಗೋಲ್ಡನ್ ರೇಷಿಯೋ ಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲಾದ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ



### ಸಮಾನ ಅನುಪಾತಗಳ ಸಂಕಲನ

$$1. \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{6} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{100}{200} \text{ ಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?}$$

ನಾವು ಹೀಗೆ ಸಂಕಲನ ಮಾಡಬಹುದೇ?

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{6} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{100}{200} &= \frac{1+2+3+4+\dots+100}{2+4+6+8+\dots+200} \\ &= \frac{5050}{2 \times 5050} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \dots = \frac{p_n}{q_n}$$

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \dots + \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$2. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ iff } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (b, d > 0)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ iff } \frac{1+2}{2} = \frac{3+6}{6}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6} \text{ ಮತ್ತು } \frac{5}{2} = \frac{15}{6} \dots \dots \text{ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.}$$

## ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಘನಮೂಲಗಳು

### 6.0 ಪೀಠಿಕೆ

ನಾವು ಕೆಲವು ಪ್ರಮಾಣ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಚೌಕಾಕಾರಗಳನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆಯೋ ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ

ಒಂದು ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 1 ಪ್ರಮಾಣ ವಾದರೆ ಅದು ಪ್ರಮಾಣ ಚೌಕ.

ಕ್ರ.ಸಂ	ಚಿತ್ರ	ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಚ.ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ	ಬಳಸಿದ ಚದರ ಮಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1		1	1
2		2	4
3		3	9

ಇದೇ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಂತರ ಬರುವ ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 6 ಪ್ರಮಾಣಗಳಾಗಿರುವ ಚೌಕಾಕಾರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಚೌಕಗಳು ಬೇಕಾಗುವುದೋ ಊಹಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ??

ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಲಿಂದ ನಾವು ಚೌಕಗಳನ್ನು 1, 4, 9, 16, 25 ... ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣ ಚೌಕಗಳಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ್ದೇವೆ?

1, 4, 9, 16, 25, ... ನಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

$$1 = 1 \times 1 = 1^2$$

$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$9 = 3 \times 3 = 3^2$$

$$16 = 4 \times 4 = 4^2$$

$$25 = \dots \times \dots = \dots$$

$$36 = \dots \times \dots = \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$m = n \times n = n^2 \text{ ಆದರೆ } m, n \text{ ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.}$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ ಅಪವರ್ತಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ' ಅಥವಾ 'ಪೂರ್ಣವರ್ಗ' ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ

ಕೆಲವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾ: (i)  $9 = 3 \times 3$

(ii)  $49 = 7 \times 7$

(iii)  $1.44 = 1.2 \times 1.2$

(iv)  $2.25 = 1.5 \times 1.5$

(i) ಮತ್ತು (ii) ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 9 ಮತ್ತು 49 ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು  $m = n \times n$  ಎಂದು (ಇಲ್ಲಿ  $m$  ಮತ್ತು  $n$  ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iii) ಮತ್ತು (iv) ಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವನ್ನು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ 'm' ನ್ನು  $n^2$  ಆಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ, ಆಗ 'm' ನ್ನು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಅಥವಾ 'n' ನ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ 'm' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

**ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ :** ಎರಡು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

**ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ :** ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮ.

“ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ” ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗದೆ ಇರಬಹುದು.

ಉದಾ : 2.25 ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ, ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು  $2.25 = (1.5)^2 = 1.5 \times 1.5$  ಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು, ಆದರೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

42 ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ?

ನಮಗೆ  $6^2 = 36$  ಮತ್ತು  $7^2 = 49$  ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ, 42 ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಅದು 6 ಮತ್ತು 7 ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು. ಆದರೆ 6 ಮತ್ತು 7 ನಡುವೆ ಅಂತಹ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ 42 ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

①	2	3	④	5	6	7	8	⑨	10
11	12	13	14	15	⑩	17	18	19	20
21	22	23	24	⑫	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	⑬	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	⑭	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	⑮	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
⑯	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	⑰

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದೇ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೇ.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ :**

- (i) 100 ಮತ್ತು 150 (ii) 150 ಮತ್ತು 200ಗಳ ನಡುವಿನ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 56 ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯೇ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ?

### 6.1 ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು:

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯೆ	ವರ್ಗ
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	.....
7	49
8	64
.....	81
10	100

ಸಂಖ್ಯೆ	ವರ್ಗ
11	121
12	144
13	.....
14	196
15	225
16	.....
17	289
18	324
19	361
20	400

ಸಂಖ್ಯೆ	ವರ್ಗ
21	441
22	.....
23	529
.....	576
25	625
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು 0, 1, 4, 5, 6 ಅಥವಾ 9 ಗಳಿಂದ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು, ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2, 3, 7 ಅಥವಾ 8 ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. “ 2, 3, 7 ಅಥವಾ 8 ಗಳು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ”

ನಾವು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0, 1, 4, 5, 6 ಅಥವಾ 9ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನಬಹುದೇ? ಅದರ ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ..



**ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :**

- ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಊಹಿಸಿ ಮತ್ತು ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ. ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಸರಿನೋಡಿರಿ.  
(i) 84      (ii) 108      (iii) 271      (iv) 240      (v) 529

1, 9, 11, 19, 21ರ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗೂ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗೂ ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧವೇನಾದರೂ ಇದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ನಾವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇನಂದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಾದರೂ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಅಥವಾ 9 ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವರ್ಗದ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 4 ಅಥವಾ 6 ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ 6 ಇರುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0, 2, 3, 5, 7 ಮತ್ತು 8 ಇದ್ದರೆ ಅದರ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ ಹೇಗಿರುತ್ತದೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.





ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

- ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?  
(i)  $126^2$  (ii)  $179^2$  (iii)  $281^2$  (iv)  $363^2$
- ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 6 ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?  
(i)  $116^2$  (ii)  $228^2$  (iii)  $324^2$  (iv)  $363^2$

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :



ವ್ಯಷ್ಟವಿ ಹೇಳಿಕೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಗಳು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಗಳು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ನೀವು ಆಕೆಯ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ? ಋಜುವಾತು ಮಾಡಿರಿ.

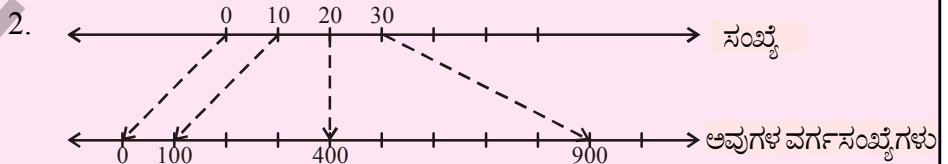
ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ :

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ವರ್ಗದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	
	(ಕನಿಷ್ಠ)	(ಗರಿಷ್ಠ)
1-9	1	2
10-99	.....	4
100-999	5	.....
1009-9999	7	8
n ಅಂಕ	.....	.....



ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ:

- ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳವೆಯೋ ಊಹಿಸಿರಿ.  
(i) 72 (ii) 103 (iii) 1000



27; 20 ಮತ್ತು 30 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

$27^2$ ;  $20^2$  ಮತ್ತು  $30^2$  ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ  $27^2$  ಯಾವುದಾಗಿರಬಹುದೋ ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

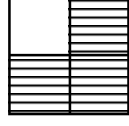
- 329
- 525
- 529
- 729

### 6.2. ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿಕರ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು :

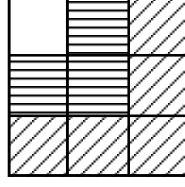
1. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿ.



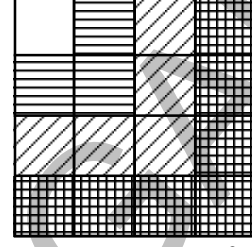
$$1 = 1^2$$



$$1+3 = 4 = 2^2$$



$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$



$$1+3+5+7 = 16 = 4^2$$

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \dots = (\quad)^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \dots = (\quad)^2$$

ಇದರಿಂದ, ನಾವು ಮೊದಲ 'n' ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 'n<sup>2</sup>'.ಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು.

2. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ.

$$(11)^2 = 121$$

$$(101)^2 = 10201$$

$$(1001)^2 = 1002001$$

$$(10001)^2 = \dots$$

$$(1000001)^2 = \dots$$

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 1 \ 2 \ 1$$

$$111^2 = 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1$$

$$1111^2 = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1$$

$$11111^2 = \dots$$

$$111111^2 = \dots$$

ಪಾಲಿನ್ಡ್ರೋಮ್ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಶಬ್ದ ; ಒಂದು ವಾಕ್ಯ, ಒಂದು ವಾಕ್ಯ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದುಮುಂದಾಗಿ ಓದಿದರೂ ಅವೇ ಯಾಗಿರುತ್ತವೆ  
Ex. NOON, MALAYALAM, MADAM  
Rats live on no evil star.  
15651

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿನ್ಡ್ರೋಮ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (palindromic) ಅಥವಾ ದ್ವಿಮುಖಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುವರು.

4. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳಿಂದ ಬಿಟ್ಟು ಹೋದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$$

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

$$4^2 + 5^2 + ( )^2 = 21^2$$

$$5^2 + ( )^2 + 30^2 = ( )^2$$

$$6^2 + 7^2 + ( )^2 = ( )^2$$

ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

ನೀವು ವರ್ಗಗಳ ಆಧಾರಗಳ ನಡುವೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಾಣುವಿರಾ?

ಮೂರರ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆ?

ಫಲಿತ ವರ್ಗದ ಆಧಾರ, ಮೂರನೇ ವರ್ಗದ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

5. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಬಿಟ್ಟು ಹೋದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

$$3^2 = 9 = 4 + 5 \quad \left( \frac{3^2 - 1}{2} + \frac{3^2 + 1}{2} \right)$$

$$5^2 = 25 = 12 + 13 \quad \left( \frac{5^2 - 1}{2} + \frac{5^2 + 1}{2} \right)$$

$$7^2 = 49 = 24 + 25 \quad ( \quad + \quad )$$

$$11^2 = 121 = \dots + \dots \quad \left( \frac{11^2 - 1}{2} + \frac{11^2 + 1}{2} \right)$$

$$15^2 = 225 = \dots + \dots \quad ( \quad + \quad )$$

ಇದರಿಂದ, ಏನನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸ ಬಹುದೆಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ 'n'ಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.  $\left( \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{n^2 + 1}{2} \right)$

6. ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು:

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.

ಅನುಕ್ರಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳು	ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	ಸಂಬಂಧ
$1^2 = 1; 2^2 = 4$	2, 3 (2 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1 ಮತ್ತು 4ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ)	$2 \times$ ಮೊದಲ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಧಾರ 1, $(2 \times 1 = 2)$
$2^2 = 4; 3^2 = 9$	5, 6, 7, 8 (4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4 ಮತ್ತು 9ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ)	$2 \times$ ಮೊದಲ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಧಾರ 2, $(2 \times 2 = 4)$
$3^2 = 9; 4^2 = 16$	10, 11, 12, 13, 14, 15 (6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 9 ಮತ್ತು 16ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ)	$2 \times$ ಮೊದಲ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಧಾರ 3, $(2 \times 3 = 6)$
$4^2 = 16; 5^2 = 25$	.....	$2 \times$ ಮೊದಲ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಧಾರ 4, $(2 \times 4 = 8)$
$5^2 = 25; 6^2 = 36$	.....	.....
.....	.....	.....

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನೀವು ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ,  $n^2$  ಮತ್ತು  $(n + 1)^2$  ನಡುವೆ ಇರುವ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  $n^2$  ಮತ್ತು  $(n + 1)^2$  ನಡುವೆ '2n' ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

1.  $9^2$  ಮತ್ತು  $10^2$  ಗಳ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿವೆ?
2.  $15^2$  ಮತ್ತು  $16^2$  ಗಳ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿವೆ?



**ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ:**

ರೆಹಾನ್  $9^2$  ಮತ್ತು  $11^2$  ಗಳ ನಡುವೆ 37 ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಹೇಳಿದ್ದು ಸರಿಯೇ? ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಬಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳಾವುವು?
 

(i) 39	(ii) 297	(iii) 5125	(iv) 7286	(v) 8742
--------	----------	------------	-----------	----------
2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು?
 

(i) 121	(ii) 136	(iii) 256	(iv) 321	(v) 600
---------	----------	-----------	----------	---------
3. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ?
 

(i) 257	(ii) 4592	(iii) 2433	(iv) 5050	(v) 6098
---------	-----------	------------	-----------	----------
4. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವು ಸರಿ ಅಥವಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
 

(i) 431	(ii) 2826	(iii) 8204	(iv) 17779	(v) 99998
---------	-----------	------------	------------	-----------
5. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ವರ್ಗಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿವೆಂಬುದನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿರಿ.
 

(i) 25; 26	(ii) 56; 57	(iii) 107; 108
------------	-------------	----------------
6. ಸಂಕಲನಮಾಡದೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$
(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 =$
(iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 =$

### 6.3 ಪೈಥಾಗೋರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳು:

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

$$(i) \quad 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

$$(ii) \quad 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (3, 4, 5) ಮತ್ತು (5, 12, 13) ಪೈಥಾಗರೋಸ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ a, b, c ಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು,  $a^2 + b^2 = c^2$  ಆದರೆ ಆಗ a, b, c ಗಳನ್ನು ಪೈಥಾಗರೋಸ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

a, b, c ಗಳಿಗೆ '1' ಅಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ (a, b, c) ನ್ನು ಮೂಲರೂಪದ ತ್ರಿವಳಿಗಳು (primitive triplet) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

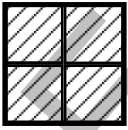


**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

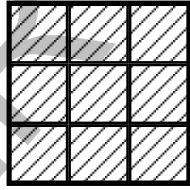
- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೈಥಾಗೋರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗುತ್ತವೆಯೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
  - 2, 3, 4
  - 6, 8, 10
  - 9, 10, 11
  - 8, 15, 17
- ಒಂದು ಪೈಥಾಗೋರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಪೈಥಾಗೋರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆಯೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

### 6.4 ವರ್ಗಮೂಲಗಳು

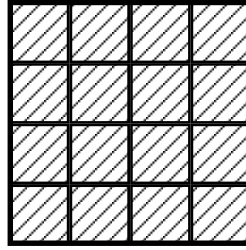
ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕಾಕಾರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ



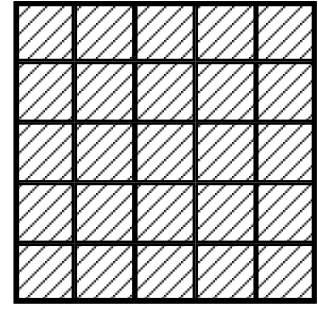
A = 4



A = 9



A = 16



A = 25

ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಸೆ.ಮೀ <sup>2</sup> ಗಳಲ್ಲಿ) (A)	ಚೌಕದ ಬಾಹು (ಸೆ.ಮೀಗಳಲ್ಲಿ) (S)
4 = 2 × 2	2
9 = 3 × 3	3
16 = 4 × 4	_____
25 = 5 × 5	_____

ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡ / ಉದ್ದ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಮಾಣ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ನೀವು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದದ ನಡುವೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಾಣುವಿರಾ?

ನಮಗೆ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಬಾಹು  $\times$  ಬಾಹು = ಬಾಹು<sup>2</sup> ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಒಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 169 ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup> ಆದರೆ ಆ ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 'x' ಸೆ.ಮೀ ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ.

$$\Rightarrow 169 = x^2$$

ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು, ನಾವು 169 ರ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಗತ್ಯ.

169 = 13<sup>2</sup> ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ = 13 ಸೆ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು, ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಆ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲ ಎನ್ನುವರು ಅಂದರೆ, 169 ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 13 ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನು  $\sqrt{169} = 13$  ಆಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ( $\sqrt{\quad}$  ಸಂಕೇತ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಬಳಸುತ್ತಾರೆ). ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲ ಎಂಬುದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧಪ್ರಕ್ರಿಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: 3<sup>2</sup> = 9 ಆದ್ದರಿಂದ 9 ರ ವರ್ಗಮೂಲ 3 ( $\sqrt{9} = 3$ )

$$4^2 = 16 \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } 16 \text{ ರ ವರ್ಗಮೂಲ } 4 (\sqrt{16} = 4)$$

$$5^2 = 25 \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } 25 \text{ ರ ವರ್ಗಮೂಲ } 5 (\sqrt{25} = 5)$$

$$y^2 = x \text{ ಆದರೆ } x \text{ ನ ವರ್ಗಮೂಲ } y (\sqrt{x} = y)$$

ಉದಾಹರಣೆ 2: 1.  $\sqrt{4} = 2$  ಏಕೆಂದರೆ  $2^2 = 4$

$$2. \sqrt{16} = 4 \text{ ಏಕೆಂದರೆ } 4^2 = 16$$

$$3. \sqrt{225} = 15 \text{ ಏಕೆಂದರೆ } 15^2 = 225 \text{ ಇತ್ಯಾದಿ.}$$

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ:

ವರ್ಗ	ವರ್ಗಮೂಲ
1 <sup>2</sup> = 1	$\sqrt{1} = 1$
2 <sup>2</sup> = 4	$\sqrt{4} = 2$
3 <sup>2</sup> = 9	$\sqrt{9} = 3$
4 <sup>2</sup> = 16	$\sqrt{16} = 4$
5 <sup>2</sup> = 25	$\sqrt{25} = \dots\dots\dots$
6 <sup>2</sup> = 36	$\sqrt{36} = \dots\dots\dots$
7 <sup>2</sup> = \dots\dots\dots	$\sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$
8 <sup>2</sup> = \dots\dots\dots	$\sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$
9 <sup>2</sup> = \dots\dots\dots	$\sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$
10 <sup>2</sup> = \dots\dots\dots	$\sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$

25 ಎಂಬುದು 5 ಮತ್ತು -5 ರ ವರ್ಗ. ಆದ್ದರಿಂದ, 25 ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು 5 ಅಥವಾ -5.

ಆದರೆ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೇವಲ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ವರ್ಗಮೂಲ (principal square root) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು  $\therefore \sqrt{25} = 5$  ಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

### 6.5 ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು :

ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸುತ್ತಾ ಅನುಕ್ರಮ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

$$\begin{aligned} \text{ಗಮನಿಸು, } 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,  $\sqrt{49}$  ರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 1	$49 - 1 = 48$	(ಮೊದಲ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು)
ಹಂತ 2	$48 - 3 = 45$	(2 <sup>ನೇ</sup> ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು)
ಹಂತ 3	$45 - 5 = 40$	(3 <sup>ನೇ</sup> ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು)
ಹಂತ 4	$40 - 7 = 33$	
ಹಂತ 5	$33 - 9 = 24$	
ಹಂತ 6	$24 - 11 = 13$	
ಹಂತ 7	$13 - 13 = 0$	

ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು  
 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2 = 49$   
 $49 - [1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13] = 0$   
 ಆದ್ದರಿಂದ 49 ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ.

1 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಏಳು ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 49 ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ 7<sup>ನೇ</sup> ಹಂತದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ (0) ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ.

$$\therefore \sqrt{49} = 7$$

ಸೂಚನೆ: ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ (0) ಬರದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.



#### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

- (i) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಅಥವಾ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

(i) 55                      (ii) 90                      (iii) 121

ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪುನರಾವೃತ ವ್ಯವಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭ. ಆದರೆ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 625, 729.....ಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಮಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಸುಲಭ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಎರಡು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅವುಗಳೆಂದರೆ

- (i) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ವಿಧಾನ
- (ii) ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನ

### 6.6 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

484ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಹಂತ 1: ಸಂಖ್ಯೆ (484)ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ, ಆಗ ನಮಗೆ

$$484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$$

ಹಂತ 2: ಸಮಾನವಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಗುಂಪು ಮಾಡಿ

$$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$$

ಹಂತ 3: ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$$

ಆದ್ದರಿಂದ 484ರ ವರ್ಗಮೂಲವು 22.

ಈಗ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ 1296ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಸಂಖ್ಯೆ 1296ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ,

$$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$$

$$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

ಉದಾಹರಣೆ 4 : 1764ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಸಂಖ್ಯೆ 1764ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ, ಆಗ ನಮಗೆ

$$1764 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (7 \times 7)$$

$$\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7$$

$$\therefore \sqrt{1764} = 42$$

2	484
2	242
11	121
11	11
	1

$$484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$$

$$\sqrt{484} = \sqrt{(2 \times 11)^2}$$

$$= 2 \times 11$$

$$= 22$$

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

2	1764
2	882
3	441
3	147
7	49
7	7
	1



ಉದಾಹರಣೆ 5: 720 ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಅದನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : 720 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ, ಆಗ ನಮಗೆ

$$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$$

2, 2, 3ಗಳು ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿವೆ, ಆದರೆ 5 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಒಂದೇ ಇದೆ.

ಅದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 5 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೀಗೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ

$$720 \times 5 = 3600$$

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

ಉದಾಹರಣೆ 6: 6000 ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಅದನ್ನು ಭಾಗಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಬಂದ ಫಲಿತಾಂಶದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : 6000 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ, ಆಗ ನಮಗೆ

$$6000 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5}$$

2, 2, ಮತ್ತು 5ಗಳು ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿವೆ, ಆದರೆ 3 ಮತ್ತು 5

ಜೋಡಿ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಇಲ್ಲ.

ಅದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು  $3 \times 5 = 15$  ರಿಂದ 6000ನ್ನು ಭಾಗಿಸಬೇಕು

ಆದ್ದರಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ =  $6000 \div 15 = 400$

$$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

400ರ ವರ್ಗ ಮೂಲ

$$\sqrt{400} = \sqrt{(2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (5 \times 5)}$$

$$= 2 \times 2 \times 5$$

$$= 20$$

2	6000
2	3000
2	1500
2	750
3	375
5	125
5	25
5	5
	1
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

### ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) 441

(ii) 784

(iii) 4096

(iv) 7056

2. 3645ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಗುಣಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. 2400ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಅದಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಬಂದ ಫಲಿತಾಂಶದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 7776ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.
5. ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿರುವ 1521 ಮರಗಳು ಕೆಲವು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ತೋಟದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ₹ 2601ನ್ನು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾ ಶುಲ್ಕ ಆಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಿದ ಶುಲ್ಕ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಆ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
7. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 1296 ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇನ್ನೊಂದರ 16 ರಷ್ಟು ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
8. 7921 ಸೈನಿಕರು ಒಂದು ಆಡಿಕೋರಿಯನ್ನಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕುಳಿತುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆಂದರೆ ಅವರು ಕುಳಿತ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸೈನಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇಯಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಆಡಿಕೋರಿಯನ್ನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳಿವೆ?
9. ಚೌಕಾಕಾರದ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 5184 ಮೀ<sup>2</sup>. ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಆಯತಾಕಾರ ಹೊಲದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಆಯತದ ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಆಯತಾಕಾರ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 6.7 ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು :

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ ಅದು ತುಂಬಾ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲಕರವಲ್ಲದ ವಿಧಾನ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ 784 ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$\overline{784}$	ಹಂತ 1 : ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಎಡಗಡೆಗೆ ಚಲಿಸಿ ಎರಡೆರಡು ಅಂಕಗಳ ಗುಂಪು ಮಾಡಿ ಅಂಕಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅಡ್ಡಗೆರೆಯನ್ನು (Bar) ಹಾಕಿ.
$2 \overline{784} 2$	ಹಂತ 2 : ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ಥಾನಬೆಲೆಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ. ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನ ಅಂಕ ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮ ಇರುವ ದೊಡ್ಡದಾದ ವರ್ಗವನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ (ಅದು 2). ಅಂದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.
$2 \overline{784} 2$ 4	ಹಂತ 3 : ಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ( $2 \times 2 = 4$ ) ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಅಥವಾ ಅಂಕಿಯಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ (ಅದು $7 - 4 = 3$ )
$2 \overline{784} 2$ -4 384	ಹಂತ 4 : ಎರಡನೇ ಗುಂಪನ್ನು ಕೆಳಗೆ (ಅದು 84) ಶೇಷದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ (ಅದು 3). ಇದು ಹೊಸ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಆಗುತ್ತದೆ (ಅದು 384).
$2 \overline{784} 2$ -4 4 \square 384	ಹಂತ 5 : ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಜಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಮೂದಿಸಬೇಕು (ಅದು $2 \times 2 = 4$ ) ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಅಂಕಿಗಾಗಿ ಖಾಲಿ ಜಾಗ ಬಿಡಬೇಕು.

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & \overline{784} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 4\boxed{8} & 384 & \\ & 384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

ಹಂತ 6 : ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಮುಂದಿನ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಖಾಲಿ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಊಹಿಸಿ. ಅದು ಹೇಗಿರಬೇಕೆಂದರೆ ಆ ಅಂಕ ಮತ್ತು ಹೊಸ ಭಾಜಕದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮ ಇರಬೇಕು. (i.e.  $48 \times 8 = 384$ ).

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & \overline{784} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 48 & 384 & \\ & -384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

ಹಂತ 7 : ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ದೊರೆತ ಭಾಗಲಬ್ಧ 28, ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \sqrt{784} = 28$$

### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಬರೆಯಿರಿ



ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಜಕ 48 ರಲ್ಲಿ 8 ಏಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೋ, ಸಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ?

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 384} \quad (9) \\ \underline{36} \phantom{0} \\ 24 \phantom{0} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} = 9^2$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 384} \quad (8) \\ \underline{32} \phantom{0} \\ 64 \phantom{0} \\ \underline{64} \\ 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} = 8^2$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 384} \quad (7) \\ \underline{28} \phantom{0} \\ 104 \phantom{0} \\ \underline{104} \\ 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} = 7^2$$

ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** 1296 ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

$$\begin{array}{l} \text{ಹಂತ 1} \\ \text{ಹಂತ 2} \\ \text{ಹಂತ 3} \\ \text{ಹಂತ 4} \\ \text{ಹಂತ 5} \end{array} \quad \begin{array}{r|l|l} & \overline{1296} & \\ 3 & \overline{12\ 96} & 3 \\ & 9 & \\ \hline 3 & \overline{12\ 96} & 3 \\ & -9 & \\ \hline 3 & \overline{1296} & 3 \\ \underline{6} & 396 & \\ \hline 3 & \overline{12\ 96} & 36 \\ \underline{-9} & & \\ \hline 66 & 396 & \\ \underline{-396} & & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

a	$a^2 + 2ab + b^2$	a + b
a	$a^2$	
2a + b	$2ab + b^2$	$b(2a + b) = 2ab + b^2$
	$2ab + b^2$	
	0	

$$\begin{array}{r} \text{ಗಮನಿಸಿರಿ} \\ 6 \overline{) 396} \quad (6) \\ \underline{36} \phantom{0} \\ 36 \phantom{0} \\ \underline{36} \\ 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} = 6^2$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

ಉದಾಹರಣೆ 2: 8281ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{array}{r|rr} 9 & \overline{82\ 81} & 91 \\ & -81 & \\ \hline 181 & 181 & \\ & -181 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ  $\sqrt{8281} = 91$

ಗಮನಿಸಿರಿ	
18)	181 (1)
	18
	1
	1 = 1 <sup>2</sup>
	0

ಉದಾಹರಣೆ 3: ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳಿರುವ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಅತಿದೊಡ್ಡ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 9999

ನಾವು ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ 9999 ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಶೇಷ = 198 ನಮಗೆ 9999 ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಲು 198 ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಅರ್ಥ ಏನಂದರೆ 9999 ರಲ್ಲಿ 198 ಕಳೆದರೆ, ನಾವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಪಡೆಯಬಹುದು.

∴ 9999 - 198 = 9801 ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: 4215ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಕಳೆಯಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

ಪರಿಹಾರ : ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ,

ಶೇಷ 119

ಇದರ ಅರ್ಥ, 4215 ರಿಂದ 119 ಕಳೆದರೆ ನಾವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದಕ್ಕಾಗಿ, ಕಳೆಯಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ = 119.

$$\begin{array}{r|rr} 9 & \overline{99\ 99} & 99 \\ & -81 & \\ \hline 189 & 18\ 99 & \\ & -17\ 01 & \\ \hline & 1\ 98 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 6 & \overline{42\ 15} & 64 \\ & -36 & \\ \hline 1 & 6\ 15 & \\ 124 & -4\ 96 & \\ \hline & 1\ 19 & \end{array}$$

## 6.8 ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು:

$\sqrt{17.64}$  ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1: ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅಡ್ಡಗೆರೆಯನ್ನು ಹಾಕಿ. ಅಂದರೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ 17 ರ ಮೇಲೆ ಹಾಕಿದಂತೆ. ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿ ಜೋಡಿಗುಂಪುಗಳ ಮೇಲೆ ಅಡ್ಡಗೆರೆಯನ್ನು ಹಾಕಿರಿ.

$$\sqrt{17.64}$$

ಹಂತ 2: ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದ (ಅದು 17) ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮ ಇರುವ ಒಂದು ದೊಡ್ಡದಾದ (ಅದು 4) ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ. ಅಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆ 4ನ್ನು ಭಾಜಕವಾಗಿ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆ ಗುಂಪು 17ನ್ನು ಭಾಜ್ಯವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಭಾಗಿಸಿ. ಶೇಷ 1 ಯಾಗಿ ಪಡೆಯಿರಿ.

$$\begin{array}{r|rr} 4 & \overline{17.64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

ಹಂತ 3: ಮುಂದಿನ ಗುಂಪು (ಅದು 64) ಕೆಳಗೆ ಶೇಷದ ಬಲ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಬರೆದಾಗ 164 ಬರುತ್ತದೆ, ಇದು ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{array}{r|rr} 4 & \overline{17.64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline & 1.64 & \end{array}$$

ಹಂತ 4: ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿ ( $2 \times 4 = 8$ ), ಈ 8 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಜಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಅದರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಅಂಕಿಗಾಗಿ ಖಾಲಿ ಜಾಗ ಬಿಡಬೇಕು. 64 ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯಾದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಚುಕ್ಕೆಯನ್ನು ಇಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ 4 ನಂತರ ಒಂದು ದಶಮಾಂಶ ಚುಕ್ಕೆಯಿಡಿ.

$$\begin{array}{r|l} 4 & \overline{17.64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline 8 & \square & -164 \end{array}$$

ಹಂತ 5: ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಮುಂದಿನ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಖಾಲಿ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಊಹಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಎರಡೂ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಈಗ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯ 164ಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮ ಇರಬೇಕು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಂಕಿ 2 ಆಗಿದೆ. ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

$$\begin{array}{r|l} 4 & \overline{17.64} & 4.2 \\ & -16 & \\ \hline 8 & \square & 164 \\ & & -164 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

ಹಂತ 6: ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಗುಂಪುಗಳು ಉಳಿದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ,  
 $\sqrt{17.64} = 4.2$

ಈಗ, ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ 42.25 ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಹಂತ 1 :  $\sqrt{42.25}$

$$\begin{array}{r|l} 6 & \overline{42.25} & 6 \\ & -36 & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & \overline{42.25} & 6.5 \\ 6 & -36 & \\ \hline 125 & 625 & \\ & -625 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$$

ಉದಾಹರಣೆ 2:  $\sqrt{96.04}$  ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

$$\begin{array}{r|l} 9 & \overline{96.04} & 9.8 \\ 9 & -81 & \\ \hline 188 & 1504 & \\ & -1504 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{96.04} = 9.8$$

### 6.9 ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು :

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದೇ ಹೋದರೆ ಖಚಿತವಾದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅವುಗಳ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕು.

$\sqrt{300}$  ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕು.

100 ಮತ್ತು 400 ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ನಡುವೆ 300 ಇದೆ.

$$\therefore 100 < 300 < 400$$

$$10^2 < 300 < 20^2$$

$$\text{ಅದು } 10 < \sqrt{300} < 20$$

ಆದರೆ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮೀಪವಾಗಿಲ್ಲ.  $17^2 = 289$ ,  $18^2 = 324$  ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ  $289 < 300 < 324$

$$17 < \sqrt{300} < 18$$

300 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 324 ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತಲೂ 289 ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬಹಳ ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ  $\sqrt{300}$  ರ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆ 17.



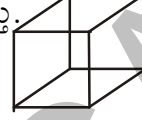
### ಅಭ್ಯಾಸ - 6.3

- ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
  - 1089
  - 2304
  - 7744
  - 6084
  - 9025
- ಕೆಳಗಿನ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
  - 2.56
  - 18.49
  - 68.89
  - 84.64
- 4000 ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಕಳೆಯಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಒಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 4489 ಚ.ಸಂ.ಮೀ ಇದೆ. ಆದರೆ ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಒಬ್ಬ ತೋಟಗಾರನು 8289 ಸಸಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೆಲವು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಹೀಗೆ ನೆಟ್ಟ ಮೇಲೆ ಅತನಿಗೆ 8 ಸಸಿಗಳು ಉಳಿದಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಸಿಗಳನ್ನು ನೆಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಅತಿಚಿಕ್ಕ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 6412 ನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಕೂಡಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂದಾಜುಮಾಡಿರಿ.
  - $\sqrt{97}$
  - $\sqrt{250}$
  - $\sqrt{780}$

ಘನಗಳು ಮತ್ತು ಘನಮೂಲಗಳು :

### 6.10 ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಘನವು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ 6 ಚೌಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.



ಕೆಲವು ಪ್ರಮಾಣ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳಿಂದ ವಿವಿಧ ಪರಿಮಾಣಗಳುಳ್ಳ ಘನಾಕಾರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸೋಣ.

ಕ್ರ.ಸಂ	ಚಿತ್ರ	ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ	ಬಳಸಿದ ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1		1	1
2		2	8
3		3	27

ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಂತರ ಬರಬೇಕಾದ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದೇ? ಪ್ರಮಾಣ ಬಾಹುವಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳು ಬೇಕು ಊಹಿಸಿರಿ?

ಆದ್ದರಿಂದ, ಘನಾಕಾರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು 1, 8, 27, 64 ..... ಪ್ರಮಾಣ ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಬೇಕು.

ಇಂತಹ, 1, 8, 27, 64 ..... ಗಳನ್ನು ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲಾಗಿ,

$$\text{ಅವು } 1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

$$64 = \dots \times \dots \times \dots =$$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ 'x' ನ ಘನಸಂಖ್ಯೆ  $x \times x \times x = x^3$

49 ಒಂದು ಘನಸಂಖ್ಯೆಯೇ? ಇಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ  $49 = 7 \times 7$  ಮಾತ್ರವೇ ಮತ್ತು ಯಾವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮೂರು ಬಾರಿ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ 49 ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಅದಲ್ಲದೇ  $3 \times 3 \times 3 = 27$  ಮತ್ತು  $4 \times 4 \times 4 = 64$  ಎಂದು ನೋಡಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ 49 ಪೂರ್ಣಘನಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.



**ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.**

1. 81 ಒಂದು ಪೂರ್ಣಘನಸಂಖ್ಯೆಯೇ?
2. 125 ಒಂದು ಪೂರ್ಣಘನಸಂಖ್ಯೆಯೇ?

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯೆ	ಘನ
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = \dots$
7	$7^3 = \dots = \dots$
8	$8^3 = \dots = \dots$
9	$9^3 = \dots = \dots$
10	$10^3 = \dots = \dots$

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಬರೆಯಿರಿ.**

(i) 1 ಮತ್ತು 100, 1 ಮತ್ತು 500, 1 ಮತ್ತು 1000 ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?

(ii) 500 ಮತ್ತು 1000 ನಡುವೆ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?





11 ರಿಂದ 20 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ	ಘನ
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

17 ಮತ್ತು 18 ರ ಘನಗಳಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿಯಾವುದಾದರೂ ಆಸಕ್ತಿಕರವಾದ ಅಂಶ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರ?

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನವು ಸಹ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯೇನಾ? ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಘನ 1 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ 0, 4, 5, 6 ಅಥವಾ 9 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?



ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ) ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(i)  $75^3$       (ii)  $123^3$       (iii)  $157^3$       (iv)  $198^3$       (v)  $206^3$

### 6.11 ಕೆಲವು ಆಸಕ್ತಿಕರ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು

- ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಬರುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 = 1^3 \\
 3 + 5 &= 8 = 2^3 \\
 7 + 9 + 11 &= 27 = 3^3 \\
 13 + 15 + 17 + 19 &= \dots = \dots
 \end{aligned}$$

ಮೊತ್ತ  $5^3$  ಬರಲು ಎಷ್ಟು ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಊಹಿಸಬಲ್ಲೀರಾ?

2. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$$

$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$$

$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$$

$$5^3 - 4^3 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

ಮೇಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)  $10^3 - 9^3$  (ii)  $15^3 - 14^3$  (iii)  $26^3 - 25^3$

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (3)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = ( )^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ( \quad )^2$$

$$\dots\dots\dots = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2$$

ಇದನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಸಾಧರಣೀಕರಣ ಮಾಡಬಹುದು.

ಮೊದಲ 'n' ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮ.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ. } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

### 6.12 ಘನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು

64 ಮತ್ತು 216 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

64 ಮತ್ತು 216 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ,

$$64 = \underline{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$216 = \underline{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3}$$

ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅಪವರ್ತನ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂರು ಬಾರಿ ಬಂದಿದೆ. ಅದರಿಂದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿ ಗುಂಪು ಮಾಡಬಹುದು.

ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದರೆ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಘನ ಅಥವಾ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುವರು.

540 ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ?

540 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ

$$540 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 5$$

ಇಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 5 ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿ ಬಂದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ 540 ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

2	540
2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1



**ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :**

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವವು ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳು?

- (i) 243      (ii) 400      (iii) 500      (iv) 512      (v) 729

**ಉದಾಹರಣೆ 13:** 2560 ನ್ನು ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನವಾಗುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** 2560 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ

$$2560 = \underline{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 5 ತ್ರಿವಳಿ ಗುಂಪಾಗಿ ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ, 2560 ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನವಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ 2560 ನ್ನು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ನಾವು

$$\text{ಅದನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ } 5 \times 5 = 25$$

2	2560
2	1280
2	640
2	320
2	160
2	80
2	40
2	20
2	10
	5

**ಉದಾಹರಣೆ 14:** ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 1600 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನವಾಗುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** 1600 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ

$$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$$

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ 5 ತ್ರಿವಳಿ ಗುಂಪಾಗಿ ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ, 1600 ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನವಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ 1600 ನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಭಾಗಿಸಬೇಕಾದ

$$\text{ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ } 5 \times 5 = 25$$

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5



## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.4

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(i) 8            (ii) 16            (iii) 21            (iv) 30
- ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣ ಘನಗಳೇ ಅಥವಾ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.  
(i) 243            (ii) 516            (iii) 729            (iv) 8000            (v) 2700
- ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 8788 ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ?
- ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 7803 ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ?
- ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 8640 ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ?
- ರವಿ ಮೇಣದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಪ್ರಮಾಣ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ 12 ಸೆ.ಮೀ, 8 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 3 ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಆಯತಘನವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದನು. ಅವನು ತಯಾರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದಾನೆ? ?
- $3^{11} + 5^{13}$  ಮೊತ್ತವನ್ನು ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

## 6.13 ಘನಮೂಲಗಳು

- ಪ್ರಮಾಣ ಬಾಹು ಉದ್ದ ಇರುವ ಘನವನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು 8 ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳು ಬೇಕು ( $2^3 = 8$ ) ಬೇಕೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.  
ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ 3 ಪ್ರಮಾಣ ಬಾಹು ಉದ್ದ ಇರುವ ಘನವನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು 27 ( $3^3 = 27$ ) ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳು ಬೇಕು.  
ಒಂದು ವೇಳೆ ಒಂದು ಘನವು 64 ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳಿಂದ ತಯಾರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಆ ಘನದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು ?

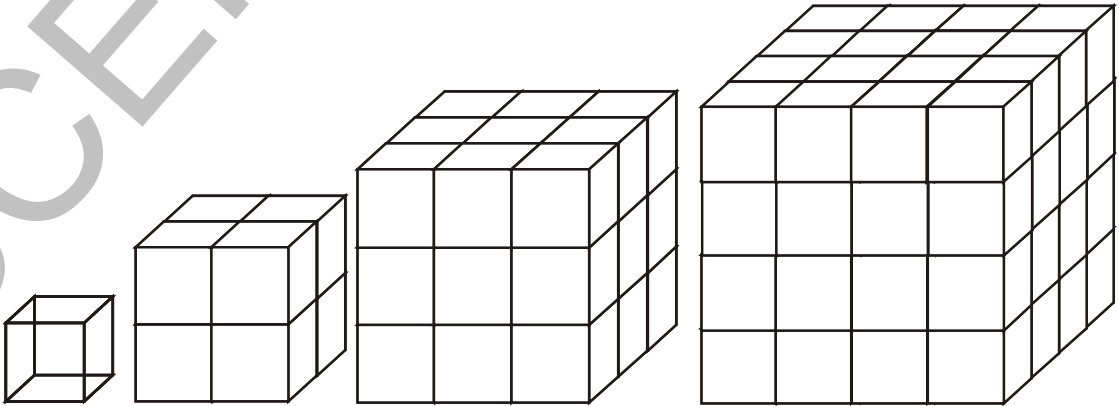
ಘನದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 'x' ಆಗಿರಲಿ

$$\therefore 64 = x^3$$

ಘನದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದರೆ 64 ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನವೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನವೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಘನ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$4^3 = 64$  ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 64 ರ ಘನ ಮೂಲ 4 ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು  $\sqrt[3]{64} = 4$  ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.  $\sqrt[3]{\quad}$  ಚಿಹ್ನೆ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ 'x' ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 'y' ನ ಘನಮೂಲವಾದರೆ,  $y = x^3$  ಆಗ  $x = \sqrt[3]{y}$ .



(1 ಮೂಲ ಮಾನ ಘನ) (2 ಮೂಲ ಮಾನ ಘನ) (3 ಮೂಲ ಮಾನ ಘನ)

(4 ಮೂಲ ಮಾನ ಘನ)

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ :

ಘನಗಳು	ಘನ ಮೂಲಗಳು
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$6^3 = \dots\dots$	$\sqrt[3]{\phantom{000}} = 6$
$7^3 = \dots\dots$	$\sqrt[3]{\phantom{000}} = 7$
$8^3 = \dots\dots$	$\sqrt[3]{\phantom{000}} = 8$
$\dots\dots = \dots\dots$	$\dots\dots = \dots\dots$
$\dots\dots = \dots\dots$	$\dots\dots = \dots\dots$

**6.14** ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

1728 ರ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಹಂತ 1 : 1728 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

ಹಂತ 2 : ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿ ಗುಂಪುಮಾಡಿರಿ.

$$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$

ಹಂತ 3: ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗುಣಿಸಿರಿ, ಆಗ ನಮಗೆ

$$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 15:** 4096ರ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ?

**ಪರಿಹಾರ:** 4096 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ

$$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$

$$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$$

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3
2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

**6.15** ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದರ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

9261 ರ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ.

ಹಂತ 1: ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತಾ ಮೂರು ಅಂಕಗಳು ಇರುವ ಹಾಗೆ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಅಂದರೆ 9	261
ಎರಡನೇ	ಮೊದಲನೇ
ಗುಂಪು	ಗುಂಪು

ಹಂತ 2: ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪು ಅದು 261 ನಮಗೆ ಘನಮೂಲದ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. 261 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಅಂಕ 1 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಘನಮೂಲವೂ ಸಹ 1 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಘನಮೂಲದ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 3: ಈಗ ಎರಡನೇ ಗುಂಪನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಅದು 9.

$$2^3 < 9 < 3^3 \text{ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.}$$

ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಘನ ಮೂಲದ ಹತ್ತನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಇರಬೇಕು.

$$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 6.5

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
  - 343
  - 729
  - 1331
  - 2744
- ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
  - 1512
  - 2197
  - 3375
  - 5832
- ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೋ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿರಿ?
  - ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ.
  - ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಘನ ಎರಡು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬಹುದು.
  - ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಂಡರೆ, ಅದರ ಘನವೂ ಸಹ 5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.
  - ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸೊನ್ನೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.
  - ಒಂದು ಅಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನವೂ ಸಹ ಒಂದು ಅಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.
  - 8 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಯಾವ ಪೂರ್ಣ ಘನಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ.
  - ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನದಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುತ್ತದೆ.
- ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗುವ ಒಂದು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
- ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ವಿನ್ಯಾಸಗಳಿಂದ ಬರೆಯಬಹುದು.
- $a, b, c$  ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು  $a^2 + b^2 = c^2$  ಆಗ  $\{a, b, c\}$  ಗಳನ್ನು ಪೈಥಾಗೋರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
- ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುವುದು.
- ಘನ ಮೂಲವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
- ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುವುದು.
- ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ.
- ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ವರ್ಗಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧಕ್ರಿಯೆ.
- ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಘನಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಿತ್ಯ ತ್ರಿಭುಜ :-

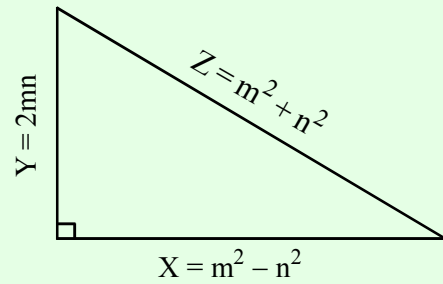
ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಕೊಡುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಡೆಡ್ಲಿಂಗ್‌ಟನ್ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಗ್ರೀಕರಿಗೆ ಗೊತ್ತು.  $m$  ಮತ್ತು  $n$  ಗಳು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಂಡ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

$$\text{ಒಂದು ಬಾಹು } X = m^2 - n^2$$

$$\text{ಎರಡನೇ ಬಾಹು } Y = 2mn$$

$$\text{ಕರ್ಣ } Z = m^2 + n^2 \text{ ಗಳಾಗಿ ಬರುತ್ತವೆ.}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ



$m$	$n$	$X = m^2 - n^2$	$Y = 2mn$	$Z = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
4	1	15	8	17

## ಆವರ್ತ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ನಕೆಗಳು

### 7.0 ಪರಿಚಯ

ಜಗದೀಶ್ ಒಂದು ದಿನ T.V. ನೋಡುತ್ತಿದ್ದನು. 2012 ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಯಾವ ದೇಶಗಳು, ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಪದಕಗಳು ಗೆದ್ದುಕೊಂಡಿವೆ ಎಂಬ ವಿವರಗಳನ್ನು T.V. ಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತೋರಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

#### 2012 - ಒಲಂಪಿಕ್ಸ್ ಪದಕಗಳ ಪಟ್ಟಿ

ಸ್ಥಾನ	ದೇಶ	ಬಂಗಾರ	ಬೆಳ್ಳಿ	ಕಂಚು	ಒಟ್ಟು
1	ಅಮೇರಿಕಾ ಸಂ.ರಾ.	46	29	29	104
2	ಚೈನಾ	38	27	23	88
3	ಬ್ರಿಟನ್	29	17	19	65
4	ರಷ್ಯಾ	24	26	32	82
5	ಕೊರಿಯಾ	13	8	7	28



ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕ 2012 ಒಲಂಪಿಕ್ ಕ್ರೀಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಐದು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ದೇಶಗಳು, ಅವು ಗೆದ್ದ ಪದಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ, ವಿವರಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ಆಲೇಖ (ಚಿತ್ರಣದ) ಮೂಲಕ ತಿಳಿಸುವ ವಿವರಗಳನ್ನು ದತ್ತಾಂಶ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ವಿವಿಧ ತರದ ವಿವರಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

- ಯಾವ ದೇಶ ಅತ್ಯಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪದಕಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದೆ?
- ಯಾವ ದೇಶ ಅತ್ಯಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಚಿನ ಪದಕಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದೆ?
- ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಕೆಯಿಂದ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ವಿವರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



#### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು, ಮೂರು ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



## 7.1 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳು

ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಆ ದತ್ತಾಂಶ ಸ್ವರೂಪದ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತೇವೆ. ಆ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಅವಗಾಹನೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆ, ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ರೂಢಿ ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಬಹುಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನೇ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

### 7.1.1 ಸರಾಸರಿ

ಇದು ಅತಿ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆ. ಇದನ್ನು ಸರಾಸರಿ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸರಾಸರಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  ಆದರೆ

ಆ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸರಾಸರಿ

$$\text{ಸರಾಸರಿ} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \quad \text{ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ}$$

$\sum x_i$  ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ( $x_i$  ಗಳು) ಮೊತ್ತ.  $x_i$  ನಲ್ಲಿ  $i$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ 1 ರಿಂದ  $n$  ವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಒಂದು ಯೂನಿಟ್ ಪರಿಷ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಶೋಕ್ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. 20, 11, 21, 25, 23 ಮತ್ತು 14. ಅವನ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು = 20, 11, 21, 25, 23, 14

$$\begin{aligned} \text{ಸರಾಸರಿ } \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{N} \\ &= \frac{20 + 11 + 21 + 25 + 23 + 14}{6} = \frac{114}{6} \\ \bar{x} &= 19 \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ 7 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ 32. ಆ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ 48 ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ**

7 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ	$\bar{x}$	$=$	32
7 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ	$\sum x_i$	$=$	$32 \times 7 = 224$
ಸೇರಿಸಿದ 8 ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ		$=$	48
8 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ	$\sum x_i$	$=$	$224 + 48 = 272$
$\therefore$ 8 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$	$=$	$\frac{272}{8} = 34$

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** ಒಂದು ಕ್ಲಬ್‌ನಲ್ಲಿ 25 ಮಂದಿ ಸದಸ್ಯರ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 38 ವರ್ಷಗಳು. ಆ ಕ್ಲಬ್‌ನಿಂದ 42 ವರ್ಷ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು ಇರುವ 5 ಮಂದಿ ಸದಸ್ಯರು ಕ್ಲಬ್‌ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಹೋದರೆ ಉಳಿದ ಸದಸ್ಯರ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?

**ಸಾಧನೆ:** 25 ಮಂದಿ ಸದಸ್ಯರ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು = 38 ವರ್ಷಗಳು.  
 ಒಟ್ಟು 25 ಮಂದಿ ವಯಸ್ಸು =  $38 \times 25 = 950$   
 5 ಮಂದಿ ಸದಸ್ಯರ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು = 42 ವರ್ಷಗಳು  
 ಒಟ್ಟು ವಯಸ್ಸು =  $42 \times 5 = 210$   
 ಉಳಿದ 20 ಮಂದಿ ಸದಸ್ಯರ ಒಟ್ಟು ವಯಸ್ಸು =  $950 - 210 = 740$   
 $\therefore$  ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{740}{20} = 37$  ವರ್ಷಗಳು

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ 9 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ 45 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಒಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 24 ನ್ನು 42 ಆಗಿ ತಪ್ಪಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದರೆ, ಅಸಲು ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು?

**ಸಾಧನೆ:** 9 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ = 45  
 9 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ =  $45 \times 9 = 405$   
 ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದರಲ್ಲಿ 24 ನ್ನು 42 ಯಾಗಿ ತಪ್ಪಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ  
 $\therefore$  9 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಅಸಲು ಮೊತ್ತ =  $405 - 42 + 24 = 387$   
 9 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಅಸಲು ಸರಾಸರಿ =  $\frac{\sum x_i}{N} = \frac{387}{9} = 43$

**ಮೇಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ,**

- ಸರಾಸರಿ ಸಮಗ್ರ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯವಹಿಸುತ್ತದೆ.
- ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.
- ಇದು ಏಕೈಕ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಸಹ ಅದೇ ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಆಗುತ್ತದೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೂ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೂ ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಸಹ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

### 7.1.2 ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ 7, 10, 15, 21, 27. ಎಂಬ ಐದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿವೆ. ಶಿಕ್ಷಕನು ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸದೆಯೇ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ ಎಂದು ಕೇಳಿದಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಹೇಳಿದರು:

ಕಮಲ್ : ಇದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಲ್ಪ, ಅತ್ಯಧಿಕ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ 17 ಆಗುತ್ತದೆ.

ನೀಲಿಮ: ಇದು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ 15 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಲೇಖ್ಯ : ಇದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 16 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಒಂದೊಂದು ಅಂದಾಜನ್ನು 'ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿದ ಸರಾಸರಿ' ಅಥವಾ 'ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು 'A' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೇಳಿದ ಸರಾಸರಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ನಿಜವಾಗಿ ಸರಾಸರಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದೆಯೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಸಂದರ್ಭ 1:** ಕಮಲ್ ಹೇಳಿದ ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ  $A = 17$

$$\text{ಆದರೆ ನಿಜವಾದ ಸರಾಸರಿ } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$$

ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ (A) ಯನ್ನು ವಿಚಲನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

ಮೌಲ್ಯಗಳು	A	ವಿಚಲನೆಗಳಿಂದ
7	17	$7 = 17 - 10$
10	17	$10 = 17 - 7$
15	17	$15 = 17 - 2$
21	17	$21 = 17 + 4$
27	17	$27 = 17 + 10$

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5 \times 17 + (-10-7-2+4+10)}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

$\therefore$  ಸರಾಸರಿ = ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ + ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ

**ಸಂದರ್ಭ 2:** ನೀಲಿಮ ಹೇಳಿದ ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ  $A = 15$

$$\text{ಸರಾಸರಿ } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$$

$\Rightarrow$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ವಿಚಲನೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ =

$$\bar{x} = \frac{(5 \times 15) + (-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

**ಸಂದರ್ಭ 3:** ಲೇಖ್ಯ ಹೇಳಿದ ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ  $A = 16$

$$\text{ಸರಾಸರಿ } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$$

$\Rightarrow$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ವಿಚಲನೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

$$\bar{x} = \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$$

$$= \frac{(5 \times 16) + (-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$



ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :-

ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ, ವಿಚಲನೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ. ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ, ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ನಿಜವಾದ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

[ಸೂಚನೆ: ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿ]

ಮೇಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳಿಂದ, ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ಸರಾಸರಿ) ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮಾನವಾದಾಗ, ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯೇ ನಿಜವಾದ ಸರಾಸರಿಯಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸರಿಮೋಡುವ ಪದ್ಧತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು ಸಹ ಮಾಡಬಹುದು.

$$\begin{aligned} \text{ಸರಾಸರಿ} &= \text{ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ} + \text{ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ} \\ &= \text{ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ} + \frac{\text{ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** 10 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ದತ್ತಾಂಶ 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 ನ ಸರಾಸರಿ 40 ಎಂದು ಊಹಿಸಿ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸಾಧಾರಣ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ. ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

**ಪರಿಹಾರ:** ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ  $A = 40$

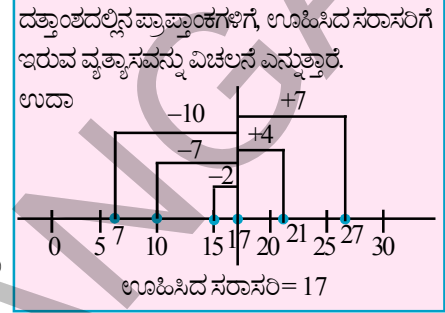
$$\therefore \text{ಸರಾಸರಿ} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 40 + \frac{(14 - 40) + (25 - 40) + (28 - 40) + (32 - 40) + (35 - 40) + (36 - 40) + (42 - 40) + (50 - 40) + (56 - 40) + (62 - 40)}{10} \\ &= 40 + \frac{(-26) + (-15) + (-12) + (-8) + (-5) + (-4) + (2) + (10) + (16) + (22)}{10} \\ &= 40 + \frac{(-70 + 50)}{10} \\ &= 40 - \frac{20}{10} \\ &= 40 - 2 = 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಸಾಧಾರಣ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ } \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{N} = \frac{14 + 25 + 28 + 32 + 35 + 36 + 42 + 50 + 56 + 62}{10} \\ &= \frac{380}{10} = 38 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶ ಸಮ.

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಾಗಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಪದ್ಧತಿ ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.



ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ:** ಒಂದು ಷೇರು ಮಾರ್ಕೆಟ್ ಬೆಲೆ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದಿದೆ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ)  
3672, 3657, 3673, 3665, 3668. ಆ ವಾರದಲ್ಲಿ ಷೇರಿನ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಷೇರಿನ ಬೆಲೆಗಳು = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673  
ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ = 3668

$$\begin{aligned} \text{ಸರಾಸರಿ } \bar{x} &= A + \frac{\sum(x_i - A)}{N} \\ &= 3668 + \frac{(3657 - 3668) + (3665 - 3668) + (3668 - 3668) + (3672 - 3668) + (3673 - 3668)}{5} \\ &= 3668 + \frac{(-11 - 3 - 0 + 4 + 5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = ₹ 3667. \end{aligned}$$



### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

- ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ.
    - 17, 25, 28, 35, 40
    - 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20
- ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸರಿನೋಡಿರಿ.

### ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ

- ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ನಡೆದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ 10 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿ ವಿಷಯದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಊಹಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಸಾಧಾರಣ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ. ಸರಿನೋಡಿರಿ. ನೀವು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ, ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯೊಂದಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದಿದೆಯೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.
- ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ವ್ಯಾಯಾಮ ಶಿಕ್ಷಕನ ರಿಕ್ಕಾರ್ಡ್ ಪ್ರಕಾರ ಸರಿಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

### 7.1.3 ಮಧ್ಯಾಂಕ

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಮುಖ ಬೆಲೆ. ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಮೌಲ್ಯದ ಬಿಂದುವೇ ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅಂದರೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಮಧ್ಯಾಂಕದ ಕೆಳಭಾಗ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಮೊದಲು  $n$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ (ಏರಿಕೆ) ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ (ಇಳಿಕೆ) ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿ.

- $n$  ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಮಧ್ಯಾಂಕ  $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{th}}$  ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯ.

- $n$  ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಮಧ್ಯಾಂಕ  $\left(\frac{n}{2}\right)$  ಮತ್ತು  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮೌಲ್ಯ.

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮ = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $n = 9$  (ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ)

$$\begin{aligned} \text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} &= \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ನ ಮೌಲ್ಯ} \\ &= 5 \text{ನೇ ಮೌಲ್ಯ} = 35 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 35$$

**ಉದಾಹರಣೆ 8:** ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 61 ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮ = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $n = 10$  (ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ)

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಇವೆ.

$$\begin{aligned} \text{ಮಧ್ಯಾಂಕ } M &= \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ಗಳ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ} \\ &= 5, 6 \text{ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ} \\ &= \frac{35+36}{2} = 35.5 \end{aligned}$$

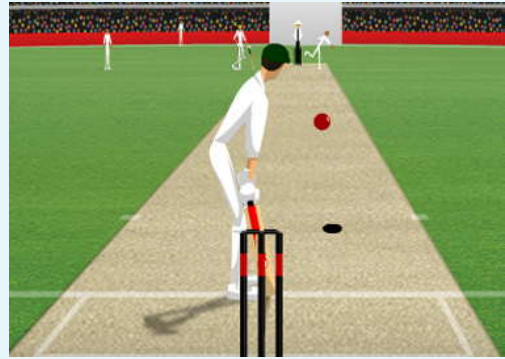


### ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮೆಚಿ

ಕೆಲವು ಭಾರತೀಯ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರ.ಸಂ..	ಆಟಗಾರನ ಹೆಸರು	ಎತ್ತರ
1.	ವಿ.ವಿ.ಎಸ್.ಲಕ್ಷ್ಮಣ್	5'11"
2.	ಪಾರ್ಥಿವ್ ಪಟೇಲ್	5'3"
3.	ಹರ್ಭಜನ್ ಸಿಂಗ್	6'0"
4.	ಸಚಿನ್ ತೆಂಡೋಲ್ಕರ್	5'5"
5.	ಗೌತಮ್ ಗಂಭೀರ್	5'7"
6.	ಯುವರಾಜ್ ಸಿಂಗ್	6'1"
7.	ರಾಬಿನ್ ಊತಪ್ಪ	5'9"
8.	ವೀರೇಂದ್ರ ಸೆಹ್ವಾಗ್	5'8"
9.	ಜಹೀರ್ ಖಾನ್	6'0"
10.	ಎಂ.ಎಸ್.ಧೋನಿ	5'11"

5' 10" ಎಂದರೆ 5 ಅಡಿ 10 ಇಂಚು





ಸೂಚನೆ :

- ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಪುನಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವೇ ರೂಢಿಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಬಹುಳಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಇದು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲಾಗಲಿ, ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೇಲಾಗಲಿ ಆಧಾರಪಡುವುದಿಲ್ಲ.
- ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ, ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳು, ಎರಡನ್ನೂ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಬಹುಳಕ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.
- ಕೆಲವು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಕೆಲವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೂ ಸಹ ಬಹುಳಕ ಇಲ್ಲದಿರಬಹುದು



### ಆನ್ಯಾಸ- 7.1

1. ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾರದಲ್ಲಿನಡೆದ ಪ್ರತಿದಿನದ ಮಾರಾಟಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ  
₹10000, ₹.10250, ₹.10790, ₹.9865, ₹.15350, ₹.10110
2. 10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35 ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು?
3. 8 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ 25 ಅವುಗಳಿಂದ 11 ಎಂಬ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ ಉಳಿದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 9 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ 38 ಆಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ 72ನ್ನು 27 ಆಗಿ ತಪ್ಪಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಒಂದು ಕುಟುಂಬ ಸದಸ್ಯರ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 25 ವರ್ಷಗಳು. ಪ್ರಸ್ತುತ ಆ ಕುಟುಂಬ ಸದಸ್ಯರ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?
6. ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ 40 ಮಂದಿ ಗುಂಪಿನ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 11 ವರ್ಷಗಳು. ಪ್ರಸ್ತುತ ಆ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಹೊರಗಡೆ ಬಂದರೆ ಉಳಿದ ಸದಸ್ಯರ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 12 ವರ್ಷಗಳು. ಆದರೆ ಹೊರಹೋದ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?
7. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ 5, 8, 10, 15, 22 ಎಂಬ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಆದರೆ, ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು?
9. ಒಂದು ಯೂನಿಟ್ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 12 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಾಧಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14. ಆದರೆ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತೊಂದು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತೆ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎರಡು ಬಾರಿ ಸಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಬಂದಿವೆಯೇ? ನಿಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವೇನು?
10. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 10 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ 15 (25 ಅಂಕಗಳಿಗೆ) ಅವರಲ್ಲಿ ಕಠಿಣ ಎಂಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಉಳಿದ 9 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಕೇಳಿ ತನಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಬಂದಿವೆ ಎಂಬ ವಿವರಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿದ್ದಾಳೆ. ಆ ವಿಚಲನೆಗಳು - 8, - 6, - 3, - 1, 0, 2, 3, 4, 6. ಆದರೆ ಆಕೆಗೆ ಬಂದ ಅಂಕಗಳೆಷ್ಟು?
11. 25 ಎಂಬ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ 'n' ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತ 25 ಮತ್ತು 35 ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಅವೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತ - 25 ಆದರೆ ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು?
12. 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವೆಷ್ಟು?
13. ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು 10, 12, 14,  $x - 3$ ,  $x$ ,  $x + 2$ , 25 ರ ಮಧ್ಯಾಂಕ 15 ಆದರೆ  $x$  ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?



14. 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬಹುಳಕ ಎಷ್ಟು?
15. ಕೆಲವು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬಹುಳಕ  $x$ . ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಂದೆನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕ ಎಷ್ಟು?
16. 1 ರಿಂದ 100ರ ವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಅಂಕಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಬಹುಳಕ ಎಷ್ಟು?
17. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24. ನಾಲ್ಕು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲ ಆದರೆ ಬಹುಳಕ 1 ಬೆಳೆದಿದೆ. ಆದರೆ ಸೇರಿಸಿದ 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?
18.  $x_1, x_2, \dots, \dots, x_{10}$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ 20. ಆದರೆ  $x_1 + 4, x_2 + 8, x_3 + 12, \dots, \dots, x_{10} + 40$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
19. 9 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 6 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು 7, 8, 3, 5, 9 ಮತ್ತು 5 ಗಳು ಆದರೆ ಆ 9 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
20. 9 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ 20. ಅದರಲ್ಲಿರುವ 4 ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಕ್ಕೆ 2 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಹೊಸ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 7.2 ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ, ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶ

ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾ ಹೇಗೆ ಸೂಕ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದೋ ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತು ಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳೂ ಇದ್ದಾಗ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಹೇಗೆ ಜೋಡಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಒಂದು ಗೃಹ ನಿರ್ಮಾಣ ಮಂಡಳಿ ಉದ್ಯೋಗಸ್ಥರಿಗೆ ಅವರವರ ಆದಾಯದ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮನೆ ಕಟ್ಟಿಸಿ ಕೊಡಬೇಕೆಂದು ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಅದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಮನೆ ಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡ 100 ಮಂದಿ ಉದ್ಯೋಗಸ್ಥರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿದಾಗ ಅವು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) 15000, 15750, 16000, 16000, 16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250..... 75000.

ಈ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ 100 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ರೂ 15000 ದಿಂದ 75000 ಮಧ್ಯೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಇವೆ. ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಇದ್ದಾಗ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಾರುಮಾಡಿದರೂ ಅದು ದೊಡ್ಡ ಪಟ್ಟಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಅನುಕೂಲಕರವಾದ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅಂದರೆ ಆದಾಯ ಗುಂಪುಗಳು 10001 – 20000, 20001 – 30000, ..., 70001 – 80000 ವರೆಗೆ ವಿಭಜಿಸಿಕೊಂಡು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರುಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇಂತಹ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು 'ವರ್ಗಾಂತರ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10001 – 20000 ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರ. ಈ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು 10001 ರಿಂದ 20000 ವರೆಗೆ ಬೆಲೆಗಳು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ 10001 ನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ ಎಂದು 20000ನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಎಂತಲೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಮಿತಿ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಎರಡೂ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು 'ಸಂವೃತ ವರ್ಗಾಂತರ' (Inclusive Interval) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

### 7.2.1 ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ - ಅವಗಾಹನೆ:

**ಉದಾಹರಣೆ 11:** ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 30 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳ ಪಕ್ಕದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ,

- (i) ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕ್ರ.ಸಂ	ಅಂಕಗಳು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1	0 – 5	5
2	5 – 10	7
3	10 – 15	10
4	15 – 20	6
5	20 – 25	2

- (ii) ಮೂರನೇ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದ್ದಾರೆ?
- (iii) 10 ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತಾನೆ?
- (iv) ನಾಲ್ಕನೇ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ 6 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?
- (v) ಐದನೇ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು. ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರ ಅಂಕಗಳೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:**

- (i) ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ.
- (ii) ಮೂರನೇ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದ್ದಾರೆ.
- (iii) ಇಲ್ಲಿ 10 ಎರಡನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು (Exclusive Interval) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 10 ಅಂಕಗಳು ಮೂರನೇ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ.
- (iv) ನಾಲ್ಕನೇ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ 6 ಮಂದಿ ಅಂಕಗಳು 15 ರಿಂದ 20 ರ ಒಳಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಇರುತ್ತವೆ.
- (v) ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಈ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅವು 20 ಮತ್ತು 25 ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರಬಹುದು.



**ಇವು ಮಾಡಿ:**

ಒಂದು ಅಪಾರ್ಶಮಂಟನಲ್ಲಿ 90 ಮಂದಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

- (i) ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ
- (ii) 21-30 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಇದ್ದಾರೆ?
- (iii) ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದ ವಯಸ್ಸಿನವರು ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಇದ್ದಾರೆ
- (iv) ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸುಗಳು 61, 70 ಇಲ್ಲವೇ 65 ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

ವಯಸ್ಸು	ಜನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1 – 10	15
11 – 20	14
21 – 30	17
31 – 40	20
41 – 50	18
51 – 60	4
61 – 70	2

### 7.2.2 ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಸರಹದ್ದುಗಳು

ಕೆಲವು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 1-10, 11-20, ..... ಇದ್ದು. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅಂಕಗಳು 10.5 ಆದರೆ ಅದು 1-10 ಅಥವಾ 11-20 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆಯೇ? ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲದೆ ನೈಜ ವರ್ಗಾಂತರ ಮಿತಿಗಳು ಅಥವಾ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪಕ್ಕದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

- ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಸರಸರಿಯೇ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ, ಎರಡನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ 10, 11ಗಳ ಸರಾಸರಿ;  $\frac{10+11}{2} = 10.5$  ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದು ಆಗುತ್ತದೆ.

- ಈಗ 0.5 ರಿಂದ 10.5(10.5 ಬಿಟ್ಟು) ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ. ಈಗ 10.5 ರಿಂದ 20.5(20.5 ಬಿಟ್ಟು) ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ 11-20 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ 11-20 ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದುಗಳು 10.5 ರಿಂದ 20.5. ಆದ್ದರಿಂದ 10.5 ಎನ್ನುವುದು 11-20 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ.

- ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಊಹಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಸಹಾಯದಿಂದ (ಸಾದಾರಣವಾಗಿ 0 ಇರುತ್ತದೆ) ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ 0, 1 ಗಳ ಸರಾಸರಿ  $\frac{0+1}{2} = 0.5$ .

- ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾರೆ, ಅಂದರೆ 40, 41 ಗಳ ಸರಾಸರಿ  $\frac{40+41}{2} = 40.5$  ಇದೇ ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದು.

ಈ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರದ ನೈಜ ಮಿತಿಗಳು ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	
ಮಿತಿಗಳು	ಸರಹದ್ದುಗಳು
1 – 10	0.5 – 10.5
11 – 20	10.5 – 20.5
21 – 30	20.5 – 30.5
31 – 40	30.5 – 40.5

ವರ್ಗಾಂತರ (ಸಂವೃತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರ)	ಮಿತಿಗಳು		ಸರಹದ್ದುಗಳು	
	ಕೆಳಮಿತಿ	ಮೇಲ್ಮಿತಿ	ಕೆಳಹದ್ದು	ಮೇಲಿನ ಹದ್ದು
1-10	1	10	0.5	10.5
11-20	11	20	10.5	20.5
21-30	21	30	20.5	30.5

ವರ್ಗಾಂತರ (ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರ)	ಮಿತಿಗಳು		ಸರಹದ್ದುಗಳು	
	ಕೆಳಮಿತಿ	ಮೇಲ್ಮಿತಿ	ಕೆಳಹದ್ದು	ಮೇಲಿನ ಹದ್ದು
0-10	0	10	0	10
10-20	10	20	10	20
20-30	20	30	20	30

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಂತಾದರೆ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿ (ಸಂವೃತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು) ಗಳಲ್ಲಿ, ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಿತಿಗಳು, ಸರಹದ್ದುಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ (ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು) ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಿತಿಗಳು, ಸರಹದ್ದುಗಳು ಸಮ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಕೆಳಗಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು 'ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 'C' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.



### ಇವು ಮಾಡಿ

1. ಉದ್ದ ಜಗಿತದಲ್ಲಿ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜಗಿದ ದೂರಗಳು ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

ದೂರ( ಸಂ.ಮೀ.)	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500	501 – 600
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	7	15	3	1

- ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ವಿಮುಕ್ತ ಅಥವಾ ಸಂವೃತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳೇ?
- ಎರಡನೆ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದ್ದಾರೆ?
- 3.01 ಮೀ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಜಗಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು?
- 4.005 ಮೀ ದೂರ ಜಗಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತಾನೆ?

- ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಒಂದೊಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ ಎಷ್ಟು?

### 7.2.3 ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯ ನಿರ್ಮಾಣ.

ಮೊದಲ ಸಂಗ್ರಹಣಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ 0 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.  
31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33, 41, 37, 25, 22, 14, 3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21,  
20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

ಈಗ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ತಯಾರಿಸಬೇಕು? ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ಹೇಗೆ ವಿಭಜಿಸಬೇಕು?

ಇವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 1: ದತ್ತಾಂಶದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ವ್ಯಾಪ್ತಿ} &= \text{ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ} - \text{ಕನಿಷ್ಠ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ} \\ &= 47 - 0 = 47 \end{aligned}$$

ಹಂತ 2: ವರ್ಗಾಂತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ. (ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ 5 ರಿಂದ 8 ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತೇವೆ)

$$\text{ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 6$$

⇒ ಆದರೆ ವರ್ಗಾಂತರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗಾತ್ರ

$$= \frac{47}{6} \approx 8 \text{ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)}$$

ವರ್ಗಾಂತರ (ಅಂಕಗಳು)	ತಾಳೆ ಗುರುತುಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
0 – 7		4
08 – 15		6
16 – 23		9
24 – 31		13
32 – 39		14
40 – 47		4

ಹಂತ 3: ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ ಇರುವಂತೆ ಸಂವೃತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಅಂದರೆ 0-7, 8-15 ...

ಹಂತ4: ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾ ಒಂದೊಂದು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಸೇರುವ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತಾ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿಭಜಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ5: ಒಂದೊಂದು ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿನ ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ.

**ಆಲೋಚಿಸಿರಿ, ಚರ್ಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಬರೆಯಿರಿ:**



1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7.
2. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.  
2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (ಸೂಚನೆ:- ಸಂವೃತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)
3. ಮೇಲಿನ ಎರಡು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು? ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆ?
4. ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾಪಟ್ಟಿಗಳಿಂದ ಯಾವುದರಿಂದ ಮತ್ತೆ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿ ಬಿಡಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವು?

**7.2.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಗುಣಗಳು.**

1. ಇದು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಲವು ಅನುಕೂಲಕರವಾದ ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ (ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ) ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.
2. 5-10 ಎಂಬ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ 5 ನ್ನು ಕೆಳಮಿತಿಯೆಂದೂ, 10 ನ್ನು ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
3. 1-10, 11-20, 21-30 .... ಅಂತಹ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ, ಕೆಳಮಿತಿ ಎರಡೂ ಅದೇ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂವೃತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
4. 0-10, 10-20, 20-30 ... ಗಳಂತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ ಅದೇ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗೆ ಸೇರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
5. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ, ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಮೌಲ್ಯ ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.
6. ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಮಿತಿಗಳು, ಸರಹದ್ದುಗಳು ಸಮ ಆದರೆ ಸಂವೃತ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಮಿತಿ, ಸರಹದ್ದುಗಳು ಸಮವಲ್ಲ.
7. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಿನ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ ಅಥವಾ ಉದ್ದ ಇದನ್ನು 'C' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
8. ಈ ಪಟ್ಟಿಕೆಯಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅದರಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಬೆಲೆ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ, ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳ ಸರಾಸರಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಈ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು 'ವರ್ಗದ ಗುರುತು' ಅಥವಾ 'ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ' (X) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 12:**

ಮಾರ್ಚ್ 2010, SSC ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 30 ಮಂದಿ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಶೇಕಡಾವನ್ನು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿವರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿರಿ. 0 – 34 ಪಾಸಾಗದವರು, 35 – 49 ಮೂರನೇ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾದವರು, 50 – 60 ಎರಡನೇ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾದವರು, 60 – 74 ಮೊದಲನೇ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾದವರು. 75 – 100 ವಿಶಿಷ್ಟ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾದವರು ಹಾಗೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ**

ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೇ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಹಂತ 3 ರಿಂದ ಮುಂದುವರೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 3: ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 4: ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಸಂವೃತ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ, ಕೆಳಮಿತಿಗಳು ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತವೆ. ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಹಂಚಬೇಕು.

ಹಂತ 5: ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿನ ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(ಸೂಚನೆ :- ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಗಾತ್ರ ಸಮವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು)

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು (ಅಂಕಗಳು)	ತಾಳೆ ಗುರ್ತುಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)
0 – 34		3
35 – 49	###	7
50 – 59	###	5
60 – 74	###	6
75 – 100	###	9

**ಉದಾಹರಣೆ 13:** ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿವರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ವರ್ಗದ ಗುರುತು (ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬೆಲೆ) ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗದ ಗುರುತು	7	15	23	31	39	47
ಆವೃತ್ತಿ	5	11	19	21	12	6

**ಪರಿಹಾರ**

ವರ್ಗದ ಗುರುತು ಎಂದರೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬೆಲೆ, ಕೆಳ, ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳ ಸರಾಸರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗದ ಗುರುತುಗಳ ನಡುವೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದು ಇರುತ್ತವೆ.

ಹಂತ 1: ಕ್ರಮ ವರ್ಗದ ಅಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ;  $h = 15 - 7 = 8$ .

(ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಕ್ರಮ ವರ್ಗದ ಅಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಮಾನವೇನಾ?)

ಹಂತ 2: ಒಂದೊಂದು ವರ್ಗದ ಗುರುತು ('x') ಆದರೆ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದುಗಳು

 $x - h/2$  ಮತ್ತು  $x + h/2$  ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಹದ್ದು  $7 - \frac{8}{2} = 3$  ಮೇಲಿನ ಹದ್ದು  $7 + \frac{8}{2} = 11$  ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಉಳಿದ

ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

ವರ್ಗದ ಗುರುತು	ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
7	$(7 - 4) - (7 + 4) = 03 - 11$	5
15	$(15 - 4) - (15 + 4) = 11 - 19$	11
23	$(23 - 4) - (23 + 4) = 19 - 27$	19
31	$(31 - 4) - (31 + 4) = 27 - 35$	21
39	$(39 - 4) - (39 + 4) = 35 - 43$	12
47	$(47 - 4) - (47 + 4) = 43 - 51$	6

### 7.3 ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ (Cumulative Frequency)

ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಧೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 1000 ಮಂದಿ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳ ಉತ್ತೀರ್ಣತೆ ವಿವರಗಳನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಕೋಷ್ಟಕದ ಹಾಗೆ ನೋಟೀಸ್ ಫಲಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಫಲಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಇಬ್ಬರು ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಸಂಭಾಷಣೆ ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಶರತ್ : ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಎಷ್ಟುಮಂದಿ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಪಾಲ್ಗೊಂಡಿದ್ದಾರೆ?

ಶಂಕರ್ : ಈ ಸಮಾಚಾರದ ಪ್ರಕಾರ 1000 ಮಂದಿ ಸ್ಪರ್ಧೆ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ.

ಶರತ್ : ಇದು ನೋಡಿದ್ದೀಯಾ? 50 ರಿಂದ 60 ವರೆಗಿನ ಅಂಕಗಳು ಸಾಧಿಸಿದವರೇ 360 ಮಂದಿ ಇದ್ದಾರೆ.

ಶಂಕರ್ : ಆಹಾ! ಉತ್ತೀರ್ಣತೆ ಅಂಕಗಳು 60 ಎಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿಗೆ ಇಂಟರ್ವ್ಯೂ ಕರೆ ಬರುತ್ತದೆಂದುಕೊಳ್ಳುವೆ?

ಶರತ್ : ಅಂದರೆ, 60 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಸಾಧಿಸಿದವರು ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಎಂದು ನಿನ್ನ ಉದ್ದೇಶವೇ?

ಶಂಕರ್ : ಹೌದು, ಗಮನಿಸಿದರೆ  $50 + 25 + 10 + 5$  ಅಂದರೆ 90 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇಂಟರ್ವ್ಯೂಗೋಸ್ಕರ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಅಲ್ಲವೇ?

ಶರತ್ : ಆದರೆ 105 ಉದ್ಯೋಗಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಬೇಕಲ್ಲವೇ, ಅಂದರೆ 50 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಉತ್ತೀರ್ಣತೆ ಅಂಕಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಿರೇನೋ?

ಶಂಕರ್ : ಆದರೆ  $360 + 50 + 25 + 10 + 5$ , ಅಂದರೆ 450 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಇಂಟರ್ವ್ಯೂಗೋಸ್ಕರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ನಾವು ಸಹ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಅಂದಾಜನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

90 ಅಂಕಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಸಾಧಿಸಿದ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು (ಕೆಳಹದ್ದು) = 5

9 ನೇ ವರ್ಗಾಂತರ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದಿಗೆ ಸಮ ಇಲ್ಲವೇ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಸಾಧಿಸಿದವರು =  $10 + 5 = 15$

8 ನೇ ವರ್ಗಾಂತರ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದಿಗೆ ಸಮ ಇಲ್ಲವೇ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಸಾಧಿಸಿದವರು =  $25 + 15 = 40$

7 ನೇ ವರ್ಗಾಂತರ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದಿಗೆ ಸಮ ಇಲ್ಲವೇ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಸಾಧಿಸಿದವರು =  $50 + 40 = 90$

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕ್ರಮ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಆಯಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಕೆಳಗಿನ

ವರ್ಗಾಂತರ (ಅಂಕಗಳು)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0 – 10	25
10 – 20	45
20 – 30	60
30 – 40	120
40 – 50	300
50 – 60	360
60 – 70	50
70 – 80	25
80 – 90	10
90 – 100	5

ಸರಹದ್ದಿಗೆ ಸಮ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆ ಇರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಈ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

1. ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
2. 9ನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು 10 ನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ 9 ನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.
3. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು..

ವರ್ಗಾಂತರ (ಅಂಕಗಳು)	ಕೆಳ ಹದ್ದು	ಆವೃತ್ತಿ (ಅಭ್ಯರ್ಥಿ ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 - 10	0	25	25+975 = 1000
10 - 20	10	45	45+930 = 975
20 - 30	20	60	60+870 = 930
30 - 40	30	120	120+750 = 870
40 - 50	40	300	300+450 = 750
50 - 60	50	360	360+ 90 = 450
60 - 70	60	50	50 + 40 = 90
70 - 80	70	25	25 + 15 = 40
80 - 90	80	10	10 + 5 = 15
90 - 100	90	5	5

ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದಿಗೆ ಸಮ ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆ ಇರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ ಶಿಕ್ಷಕ ತನ್ನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದವರಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ತರಗತಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡರೆ, ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು.

ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದಿನಿಂದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಂತರದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ವರ್ಗಾಂತರ (ಅಂಕಗಳು)	ಮೇಲಿನ ಹದ್ದು	ಆವೃತ್ತಿ (ಅಭ್ಯರ್ಥಿ ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 - 5	5	7	7
5 - 10	10	10	10+7 = 17
10 - 15	15	15	15+17 = 32
15 - 20	20	8	8+32 = 40

43 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬೇಕೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

1. ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.
2. ಎರಡನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ 1ನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಅದು ಎರಡನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.



3. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಆ ಸಾಲಿನ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

1. ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ \_\_\_\_\_ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
2. ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ \_\_\_\_\_ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
3. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆರೋಹಣ, ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	1 - 10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
ಆವೃತ್ತಿ	4	7	12	5	2

4. ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತ (ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) ಎಷ್ಟು? ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಎಷ್ಟು? ನಿನೇನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆ?

**ಉದಾಹರಣೆ 14:** ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ವಿವಿಧ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟುಮಂದಿ

ವರ್ಗಾಂತರ	1 - 10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
ಆ.ಸಂ.ಆ.(ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	12	27	54	67	75

ಪರಿಹಾರ:

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ.	ಆವೃತ್ತಿ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ.
1 - 10	12	12	$12 + 63 = 75$
11 - 20	27	$27 - 12 = 15$	$15 + 48 = 63$
21 - 30	54	$54 - 27 = 27$	$27 + 21 = 48$
31 - 40	67	$67 - 54 = 13$	$13 + 8 = 21$
41 - 50	75	$75 - 67 = 8$	8

ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ಕೊನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಇಲ್ಲವೇ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ 75 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.



## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.2

1. ಒಂದು ಕಾಲೋನಿಯಲ್ಲಿ 45 ಮಂದಿಯ ವಯಸ್ಸುಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

33	8	7	25	31	26	5	50	25	48	56
33	28	22	15	62	59	16	14	19	24	35
26	9	12	46	15	42	63	32	5	22	11
42	23	52	48	62	10	24	43	51	37	48
36										

6 ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಇರುವ ಹಾಗೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿ.

2. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 30 ತರಗತಿ ಕೋಣೆಗಳಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ 4 (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು) ಇರುವಂತೆ, ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ.

25	30	24	18	21	24	32	34	22	20	22
32	40	28	30	22	26	31	34	15	38	28
20	16	15	20	24	30	25	18			

3. ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43. ಆದರೆ (i) ನಂತರದ ಎರಡು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ? (ii) ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (iii) ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ವರ್ಗದ ಗುರುತುಗಳೇನು?

4. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಗುರುತುಗಳು (ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವರ್ಗದ ಗುರುತುಗಳು	10	22	34	46	58	70
ಆವೃತ್ತಿ	6	14	20	21	9	5

- (i) ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ.  
(ii) ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.  
(iii) ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

5. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 35 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

35	1	15	35	45	23	31	40	21	13	15
20	47	48	42	34	43	45	33	37	11	13
27	18	12	37	39	38	16	13	18	5	41
47	43									

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ. ವಿತರಣೆ ಮಾಡುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು 10-20 ಇರಬೇಕು. (20 ಆ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರಕೊಡದು).

6. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಆರೋಹಣ ಮತ್ತು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	12	15	13	9

7. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಎಂತಹ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯೋ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಓಟಗಳು	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	3	8	19	25	30

8. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯೆಂದು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	42	36	23	14	6

#### 7.4 ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವಿಧಾನ :-

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಮಾಲ್ಯಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದಾಗಲೀ ಇಲ್ಲವೇ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದಾಗಲೀ ಜೋಡಿಸಿ ಬರೆದ ಜೋಡಣೆಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಪಟ್ಟಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ (ಪಿಕ್ಚೋಗ್ರಾಫ್) ಗಳು, ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಎರಡು ಕ್ರಮ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖಗಳ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

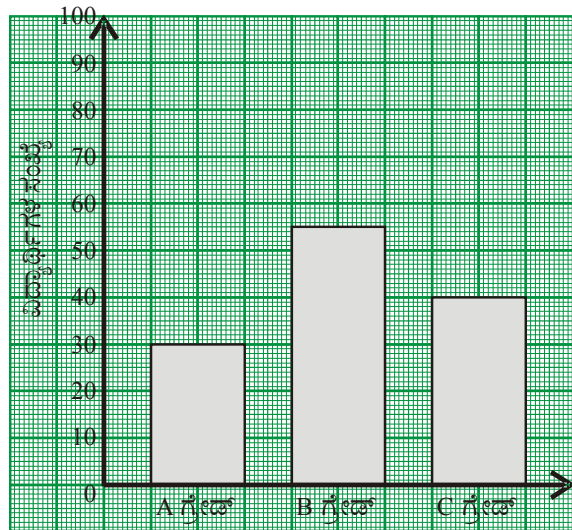
ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಮೊದಲು ಸ್ತಂಭಾಲೇಖದ ಬಗ್ಗೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

##### 7.4.1 ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ

ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮ ಅಗಲದ ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಸಮ ದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಎತ್ತರಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

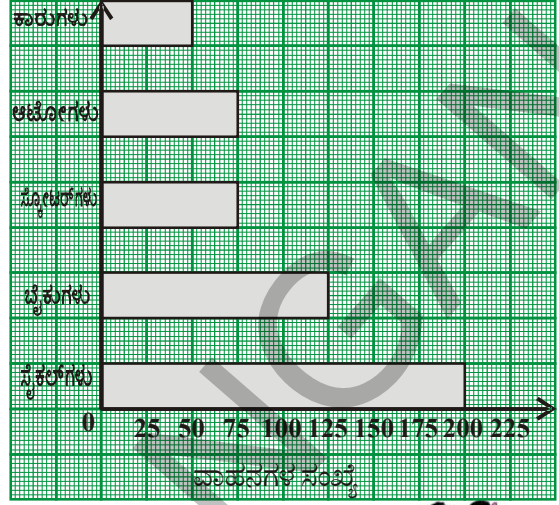
ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖದಿಂದ ಯಾವ ಯಾವ ಅಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದೋ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ವಿವರಗಳಾವುವು?

- ಪಕ್ಕದ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವಿವರಗಳಾವುವು?
- ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು A, B ಅಥವಾ C ಗ್ರೇಡುಗಳು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ?



ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆ

- (iii) ಹೆಚ್ಚುಮಂದಿ ಸಾಧಿಸಿದ ಗ್ರೇಡು ಯಾವುದು?
- (iv) ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದ್ದಾರೆ? ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆ ಅಡ್ಡ ಸ್ತಂಭಗಳ ಮೂಲಕ ನೆಲ್ಲೂರು ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿನ ಸಂಗಂ ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ 2010ರಲ್ಲಿನ ವಾಹನಗಳ ವಿವರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.



### ಆಲೋಚಿಸಿರಿ, ಚರ್ಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಬರೆಯಿರಿ



- ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ತಂಭಗಳ (a) ಉದ್ದಗಳು ಸಮ (b) ಅಗಲಗಳು ಸಮ (c) ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮ (d) ಬೆಲೆಗಳು ಸಮ
- ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಲೇಖದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದ ಉಳಿದ ಸ್ತಂಭಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆಯೇ?
- ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಉಳಿದ ಸ್ತಂಭಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆಯೇ?
- ಯಾವ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ಕಂಬ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ?

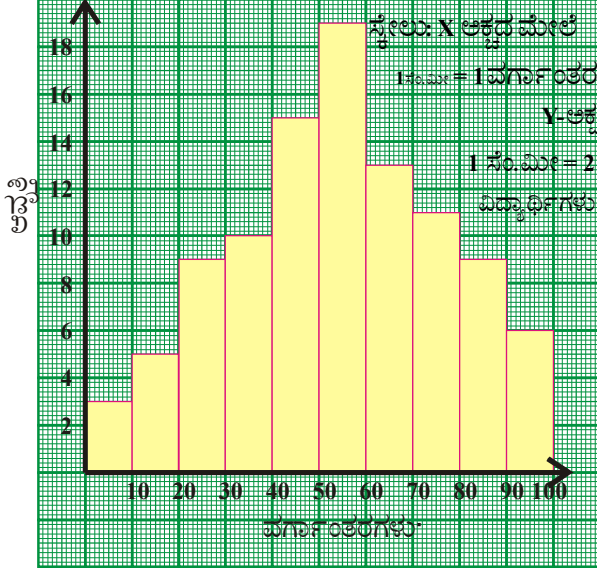
**7.5** ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು.

ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿ (ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರ) ಗಳ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಎಳೆಯುವ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವೇ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ಆಯತ ಚಿತ್ರ)

**7.5.1** ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ಆಯತ ಚಿತ್ರ)

**7.5.1.1** ಆಯತ ಚಿತ್ರದ ಮೇಲೆ ಅವಗಾಹನೆ:

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



(ವರ್ಗಾಂತರಗಳು)	ಆವೃತ್ತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0 - 10	3
10 - 20	5
20 - 30	9
30 - 40	10
40 - 50	15
50 - 60	19
60 - 70	13
70 - 80	11
80 - 90	9
90 - 100	6

- ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಇವೆ?
- ಆಯತದ ಉದ್ದಗಳು ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ?
- ಎಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳ ಅಗಲ ಸಮಾನ. ಕಾರಣವೇನು?
- ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಆಯತಗಳು ಆದರೂ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಥಾನಭ್ರಂಶ ಮಾಡಬಹುದೇ?

ಮೇಲಿನ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಿಂದ ನೀವು ಗ್ರಹಿಸಿದ್ದು

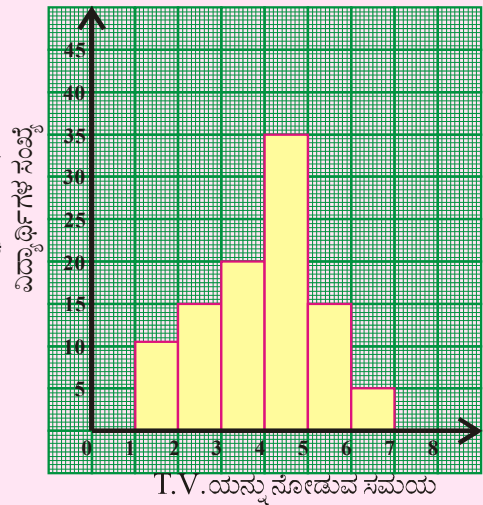
- ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ 10 ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿವೆ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 100 ಆಯತಗಳು ಇವೆ.
- ಆಯತಗಳ ಉದ್ದಗಳು, ಆಯತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.
- ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಅಂತರ ಸಮ ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳು ಸಮ.
- ದತ್ತಾಂಶ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿ ಆದ್ದರಿಂದ ಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಆಯತಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾನಭ್ರಂಶ ಮಾಡಬಾರದು.



### ಪ್ರಯೋಗ:

ಪಕ್ಕದ ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ-

- ಈ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ಯಾವ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದೆ?
- ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದ್ದಾರೆ?
- ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 5 ಗಂಟೆಗಳು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ TV ಯನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ?
- ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮೇಲೆ ಸರ್ಟೀ ನಿರ್ವಹಿಸಲಾಗಿದೆ?



### 7.5.1.2 ಆಯತ ಚಿತ್ರ (ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ) ರಚನೆ

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಆಯತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸಬೇಕೋ ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು TV ಕೇಂದ್ರದವರು ಅವರ ಪ್ರಸಾರಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದು ಆಪಾರ್ಟ್‌ಮೆಂಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಸರ್ವೆ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1 : ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂವೃತ ವರ್ಗಾಂತರ ಅಥವಾ ಸೇರ್ಪಡೆ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿರುವವಗಳನ್ನು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 2 : ಸೂಕ್ತ ಅಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು  $x$ - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಹಂತ 3 : ಸೂಕ್ತವಾದ ಅಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು  $y$ - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಪ್ರಮಾಣ:  $x$ -ಅಕ್ಷ 1 ಸೆಂ.ಮೀ = ಗಂಟೆಗಳು

$y$ -ಅಕ್ಷ 1 ಆವೃತ್ತಿ = 1 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಹಂತ 4 : ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಆಯತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

### 7.5.1.3 ವಿಭಿನ್ನ ಅಗಲಗಳ ಪಾದಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚನೆ

ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ SSC ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಉತ್ತೀರ್ಣತೆ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೆಟಗರಿ	ವರ್ಗಾಂತರಗಳು (ಅಂಕಗಳು)	ಶೇಕಡಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
ಅನುತ್ತೀರ್ಣರು	0-35	28
ತೃತೀಯ ಶ್ರೇಣಿ	35-50	12
ದ್ವಿತೀಯ ಶ್ರೇಣಿ	50-60	16
ಪ್ರಥಮ ಶ್ರೇಣಿ	60-100	44

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. ಪ್ರಥಮ ಶ್ರೇಣಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 44% ಆದರೂ ಅವರ ಗಾತ್ರ 40 (60 ರಿಂದ 100 ವರೆಗೆ) ದ್ವಿತೀಯ ಶ್ರೇಣಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 16% ಆದರೂ ಅವರ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ 10 (50 ರಿಂದ 60 ವರೆಗೆ) ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಗಾತ್ರಗಳಿಗೂ ಆವೃತ್ತಿ ಚಿತ್ರ ಎಳೆಯುವಾಗ ವರ್ಗಾಂತರ ಅಗಲಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ (ವಿಕ್ಷೇಪ ಸಂಖ್ಯೆ)	ವರ್ಗಾಂತರಗಳು
11 - 20	10	10.5 - 20.5
21 - 30	15	20.5 - 30.5
31 - 40	25	30.5 - 40.5
41 - 50	30	40.5 - 50.5
51 - 60	20	50.5 - 60.5
61 - 70	5	60.5 - 70.5
ಮಿತಿಗಳು		ಸರಹದ್ದುಗಳು

ಪ್ರಮಾಣ :

$x$ - ಅಕ್ಷ : 1 ಸೆಂ.ಮೀ = 1 ವರ್ಗಾಂತರಗಳು

$y$ - ಅಕ್ಷ : 1 ಸೆಂ.ಮೀ = 5 ಜನ



ಆವೃತ್ತಿಯ ಪ್ರತಿ ಮೂಲಮಾನದ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಮತ್ತು ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಎತ್ತರಗಳಿಗೆ ರಚಿಸಬೇಕು. ಯಾವುದಾದರೂ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರ ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಷ್ಟೆಯ ಸಾಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕನಿಷ್ಠವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಮೂಲ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

∴ ಯಾವುದೇ ಆಯತದ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿದ ಗಾತ್ರ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯ ಸಾಂದ್ರತೆಗೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

$$\text{ಆವೃತ್ತಿಯ ಸಾಂದ್ರತೆ} = \frac{\text{ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ}} \times \text{ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ}$$

ವರ್ಗಾಂತರ (ಅಂಕಗಳು)	ಶೇಕಡಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು	ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ	ಮಾರ್ಪಡಿಸಿದ ಆಯತದ ಗಾತ್ರ
0 – 35	28	35	$\frac{28}{35} \times 10 = 8$
35 – 50	12	15	$\frac{12}{15} \times 10 = 8$
50 – 60	16	10	$\frac{16}{10} \times 10 = 16$
60 – 100	44	40	$\frac{44}{40} \times 10 = 11$

ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆಯೇ ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

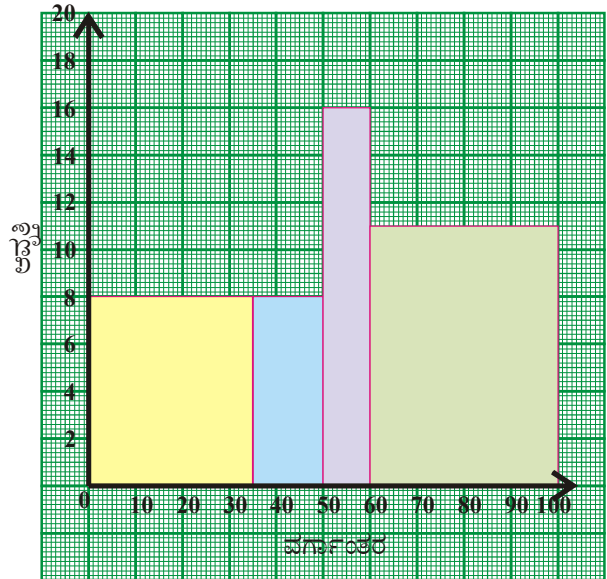
ಹಂತ 1: ಸೂಕ್ತವಾದ ಆಳತೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಹಂತ 2: ಸೂಕ್ತವಾದ ಆಳತೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಪ್ರಮಾಣ: X ಅಕ್ಷ 1 ಕನಿಷ್ಠವರ್ಗಾಂತರ = 1 ಸೆಂ.ಮೀ

Y- ಅಕ್ಷ 2 % = 1 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಹಂತ 3: ವಿವಿಧ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಪಾದಗಳಾಗಿ (ಅಗಲಗಳಾಗಿ) ಅನುಕ್ರಮ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಉದ್ದವಾಗಿ ಆಯತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



## 7.5.1.4 ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರ

**ಉದಾಹರಣೆ 15:** 8 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 65 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ (ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು)	150	160	170	180	190	200
ಆವೃತ್ತಿ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	8	10	25	12	7	3

**ಪರಿಹಾರ:** ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕ (ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ) ಗಳಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ.

**ಹಂತ 1:** ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬೆಲೆಗಳ ಮಧ್ಯಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ.  $h = 160 - 150 = 10$ .  
(ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ಸಮವೇನಾ)

**ಹಂತ 2:** ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಕೆಳ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯಬೆಲೆ 'x' ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು  $x - \frac{h}{2}$  ಮತ್ತು  $x + \frac{h}{2}$  ಒಳಗೆ ನಿರ್ಣಯಿಸಬೇಕು.

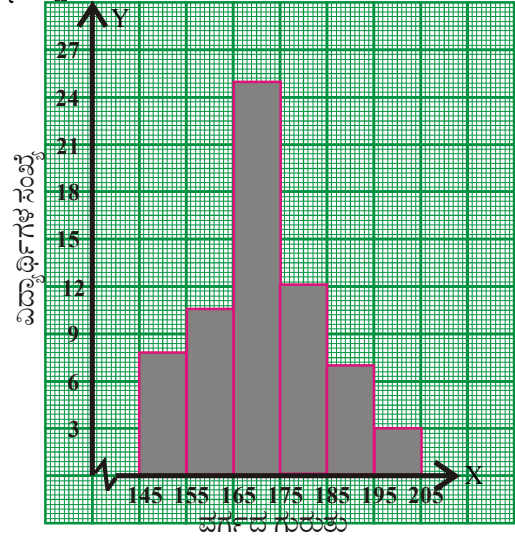
**ಹಂತ 3:** ಸೂಕ್ತವಾದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು

X-ಅಕ್ಷ 1 ಸಂ.ಮೀ = 1 ವರ್ಗಾಂತರ

Y-ಅಕ್ಷ 1 ಸಂ.ಮೀ = 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು.

**ಹಂತ 4:** ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಅಗಲಗಳಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಉದ್ದಗಳಾಗಿ ರಚಿಸಬೇಕು.

ವರ್ಗದ ಗುರುತು (x)	ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)
150	145 – 155	8
160	155 – 165	10
170	165 – 175	25
180	175 – 185	12
190	185 – 195	7
200	195 – 205	3



## ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಬರೆಯಿರಿ



1. ಆಯತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'X' ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಮಿತಿಗಳಲ್ಲ ಏಕೆ?
2. ಆಯತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ಅಂಶ ಯಾವುದು?
3. ಎಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ?

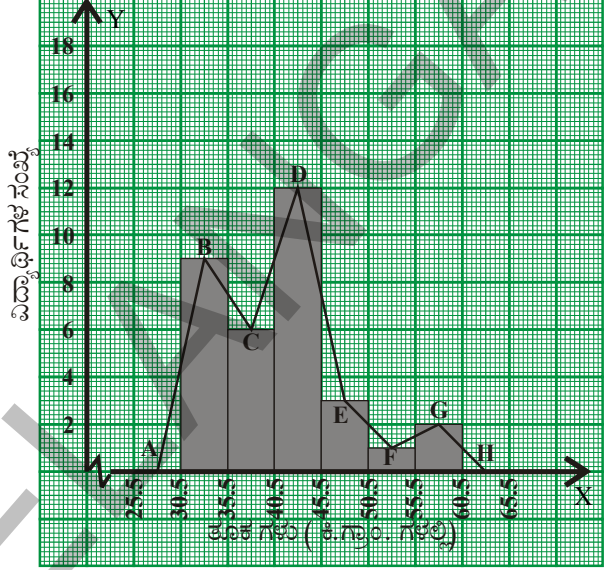


## 7.5.2 ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ

## 7.5.2.1 ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜದ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು.

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಆಯತ ಚಿತ್ರಕ್ಕಿಂತ ಉತ್ತಮವಾದ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ. ಪಕ್ಕದ ಆಯತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ 33 ಮಂದಿ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆಯತ ಚಿತ್ರ ಅಗಲಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು B, C, D, E, F, G ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಮುಂದು ಒಂದು, ನಂತರ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು 0 ಆವೃತ್ತಿಯಿಂದ ಊಹಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ BCDEFG ಚಿತ್ರ ಬರುತ್ತದೆ. ಬಹುಭುಜ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಲು 30.5-35.5 ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ 55.5 - 60.5 ವರ್ಗಾಂತರದ ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳನ್ನು A, H ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿ ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ABCDEFGH ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ ಬರುತ್ತದೆ.



ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೇ?

ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

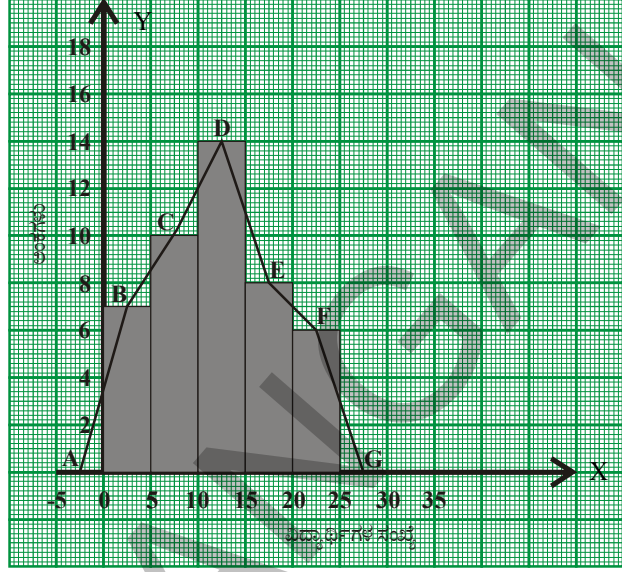


1. ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವೆ?
2. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದ ಆಯತ ಚಿತ್ರ, ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮ ಹೇಗೆ?
3. ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ ರಚಿಸುವ ಮೊದಲು ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಬೇಕು?
4. ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿ/ ಅವಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ 'ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ' ಎಳೆಯಬಹುದೇ?

## 7.5.2.2 ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನ

ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 45 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು (ಗರಿಷ್ಠ 25), ಕೆಳಗೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು (ಅಂಕಗಳು)	ಆವೃತ್ತಿ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು
0-5	7	2.5
5-10	10	7.5
10-15	14	12.5
15-20	8	17.5
20-25	6	22.5
ಒಟ್ಟು	45	



### ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

**ಹಂತ 1:** ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು.

**ಹಂತ 2:** ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಆಯತ ಆಗಲಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು B, C, D, E, F ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಈ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿ.

**ಹಂತ 3:** ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮುಂದಿನ, ಹಿಂದಿನ ಎರಡೂ ಉಪಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಇವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಯು ಸೊನ್ನೆ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

**ಹಂತ 4:** ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕೊನೆಯ ವರ್ಗಾಂತರದ ನಂತರದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿ. ಅಂದರೆ 0-5 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ -5 - 0 ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 20-25 ನಂತರದ ವರ್ಗಾಂತರ 25-30 ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು A, G ಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿ.

**ಹಂತ 5:** ಈಗ B ಬಿಂದುವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ, F ಬಿಂದುವನ್ನು G ನೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರತಿಬಾರಿ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ, ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು.



### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. ಕೆಳಗಿನ ವಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಅವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ನಡುವೆ ನಡೆದ ಸ್ನೇಹ ಪೂರ್ವಕ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟದಲ್ಲಿ ಅವರ ರನ್ನುಗಳ ವಿವರಗಳು

ಮಾಡಿದ ರನ್ನುಗಳು	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	5	8	4	2

(ii) ಒಂದು ನಾಟಕ ಪ್ರದರ್ಶನಗೋಷ್ಠಿ ಮಾಡಿದ ಟಿಕೆಟ್ ವಿವರಗಳು

ಟಿಕೆಟ್ಟುದರ	10	15	20	25	30
ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	50	30	60	30	20

## 7.5.2.3 ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಮುಖ್ಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

1. ವಿಚ್ಛಿನ್ನ/ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಹಾಗೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.
2. ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು.
3. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ರಚಿಸಿದ ಆಯತ ಚಿತ್ರ, ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮ.

## ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಬರೆಯಿರಿ



1. ಆಯತ ಚಿತ್ರದಂದು ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಬಿಡಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದೇ?
2. ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮೌಲ್ಯ ಬೆಲೆಗೆ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

## 7.5.2.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವರ್ತಾಂಕ ವಿತರಣೆಗೆ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸದೆಯೇ)

ಸಕ್ಕರೆ ಕಾಯಿಲೆ ರೋಗಿಗಳ ಮೇಲೆ ನಡೆದ ಸರ್ವೆಯಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ವಯಸ್ಸು	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	9	16	11	3

ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸದೆಯೇ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ ರಚನೆ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಹಂತ 1: ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 2: ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಬೇಕು:

$$X\text{-ಅಕ್ಷ } 1 \text{ ಸಂ.ಮೀ} = 1 \text{ ವರ್ಗಾಂತರ}$$

$$Y\text{-ಅಕ್ಷ } 1 \text{ ಸಂ.ಮೀ} = 2 \text{ ಅಂಕಗಳು}$$

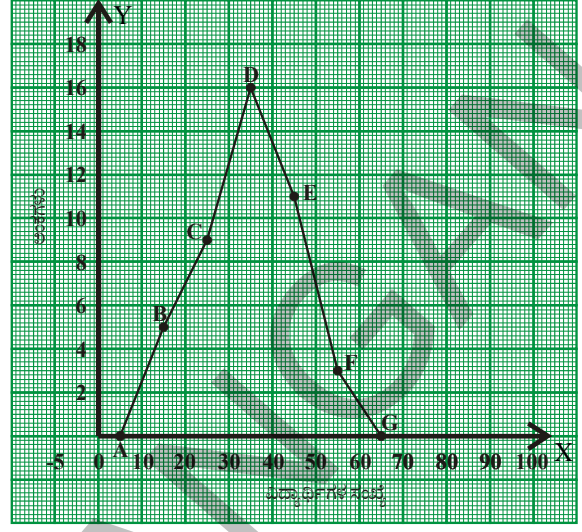
ಹಂತ 3: ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು 'x' ಮತ್ತು ಅವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ f ಆದರೆ ಬಿಂದು ('x', f) ನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 4: ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 5: ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದು ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರ, ಕೊನೆಯ ವರ್ಗಾಂತರ ನಂತರ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಊಹಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 6: ಎಲ್ಲಾ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಗೊಳಿಸಬೇಕು.

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು (ವಯಸ್ಸು)	ರೋಗಿ ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯಬೆಲೆ	ಬಿಂದುಗಳು
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



### 7.5.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಆವರ್ತಾಂಕ ವಕ್ರ

ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸುವ ವಕ್ರವನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕ ವಕ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವರ್ತಾಂಕ ವಕ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಹಂತಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

**ಹಂತ 1:** ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

**ಹಂತ 2:** ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ:

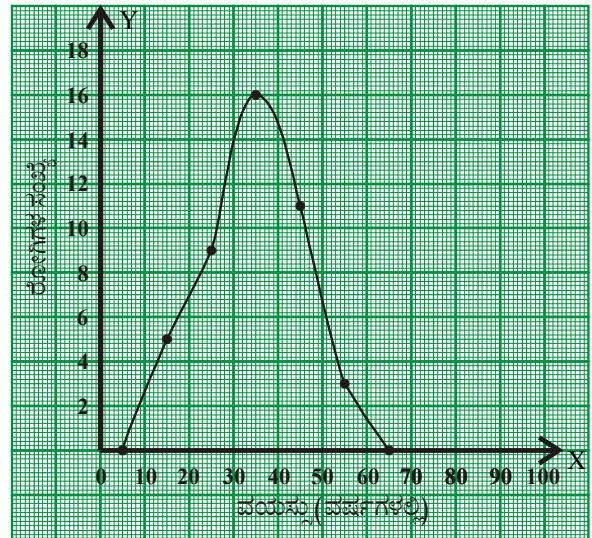
X-ಅಕ್ಷ 1 ಸಂ.ಮೀ = 1 ವರ್ಗಾಂತರ

Y-ಅಕ್ಷ 1 ಸಂ.ಮೀ = 2 ಅಂಕಗಳು

**ಹಂತ 3:** ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ 'x' ಮತ್ತು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ f ಆದರೆ ಬಿಂದು (x, f) ವನ್ನು ನಕ್ಷೆ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ.

**ಹಂತ 4:** ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಆ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ವಾದ ವಕ್ರ.

ವರ್ಗಾಂತರ ವಯಸ್ಸು	ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯಬೆಲೆ	ಬಿಂದುಗಳು
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



## 7.5.4 ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರಗಳ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ/ ಕೆಳಗಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಎಳೆಯುವ ಸೂಕ್ತ ವಕ್ರವನ್ನು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ ಅಥವಾ ಓಜಿವ್ ವಕ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರದಿಂದ, ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸರಹದ್ದನ್ನು ಇಲ್ಲವೇ ಒಂದು ಸರಹದ್ದಿನಿಂದ ದತ್ತಾಂಶದ ಕೊನೆಯವರೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳವೆಯೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

## 7.5.4.1 ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ

ಒಂದು ಡಿಪಾರ್ಟ್‌ಮೆಂಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಭವನ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಗುತ್ತಿಗೆದಾರರ ಆರ್ಜಿಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

ವರ್ಗಾಂತರ (ದಿನಗಳು)	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
ಆರ್ಜಿಗಳು	2	5	12	10	3

ಹಂತ 1: ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಸಂವೃತ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 2: ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 3: X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು, Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರಮಾಣ:

$$X\text{-ಅಕ್ಷ } 1 \text{ ಸಂ.ಮೀ} = 1 \text{ ವರ್ಗಾಂತರ}$$

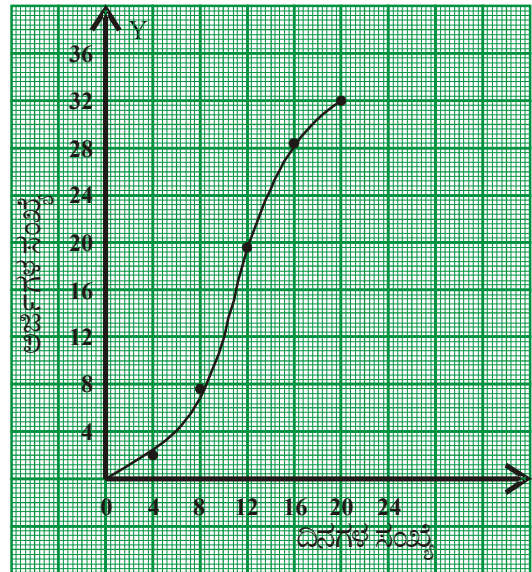
$$Y\text{-ಅಕ್ಷ } 1 \text{ ಸಂ.ಮೀ} = 4 \text{ ಆರ್ಜಿಗಳು}$$

ಹಂತ 4: ಮೊದಲ ವರ್ಗಾಂತರ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು (ಊಹಿಸಿದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದು) ಆವೃತ್ತಿ 0 ಯಿಂದ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 5: ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೂಕ್ತವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಈ ವಕ್ರವನ್ನು ಓಜಿವ್ ವಕ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ, ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ ಅಥವಾ ಓಜಿವ್ ವಕ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ವರ್ಗಾಂತರ (ದಿನಗಳು)	ಆರ್ಜಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಮೇಲಿನ ಹದ್ದು	ಆ.ಸಂ.ಆ
0 - 4	2	4	2
4 - 8	5	8	7
8 - 12	12	12	19
12 - 16	10	16	29
16 - 20	3	20	32





## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.3

1. 45 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರಜ್ಞಾಸೂಚಿಕೆ ಸ್ಥಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ (IQ ಸ್ಥಾಯಿ)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	5	6	10	9	8	5

2. 7 ನೇ ತರಗತಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 600 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಾಧಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ.

ವರ್ಗದ ಗುರುತು	360	400	440	480	520	560
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	100	125	140	95	80	60

3. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ 250 ಮಂದಿ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಒಂದು ವಾರದ ಸಂಬಳಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತ ಚಿತ್ರ, ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ.

ವಾರದ ಸಂಬಳ	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	30	42	50	55	45	28

4. ಒಂದು ಮಂಡಲದಲ್ಲಿ 60 ಮಂದಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆ ಶಿಕ್ಷಕರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ, ಆವರ್ತಾಂಕ ವಕ್ರಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ.

ವಯಸ್ಸು	24 - 28	28 - 32	32 - 36	36 - 40	40 - 44	44 - 48
ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	10	15	9	8	6

5. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು, ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಆ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಎರಡು ತರದ ಓಜಿವ್ ವಕ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	15 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	25 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	8	18	27	35



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮೊತ್ತ =  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$  ಅಥವಾ  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$  (ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೂಪ) ಇದರಲ್ಲಿ  $\sum x_i$  ಎನ್ನುವುದು ಎಲ್ಲಾ  $x_i$  ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.  $x_i$  ನಲ್ಲಿ 'i'  $x_1$  ಬೆಲೆಗಳು 1 ರಿಂದ n ವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.
- ಸರಾಸರಿ ಮೊತ್ತ = ಉಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ + ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ ಅಥವಾ  

$$\bar{x} = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$$
- ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.
- ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೇ ಮಧ್ಯಾಂಕ.
- ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವ ತೋರಿಸುವ ಆತ್ಯಲ್ಪ/ ಆತ್ಯಧಿಕ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಇರುವ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.
- ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುವ ಮೌಲ್ಯವೇ ಬಹುಳಕ ಅಥವಾ ಬಹುಳಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹವು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.
- ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ, ವಿವರಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಎರಡನ್ನೂ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಬಹುಳಕ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ಅಥವಾ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ಎನ್ನುವರು.
- ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ, ಕೆಳ ಸರಹದ್ದುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು 'C' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಸರಹದ್ದಿಗೆ ಸಮ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆ ಇರುವ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆ ಇರುವ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಎನ್ನುವರು.
- ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಮಿತಿ ಎಂದೂ, ಕೊನೆಯನ್ನು ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದಲಿ ಮೇಲ್ಮಿತಿ, ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಮಿತಿ, ಅದರ ಹಿಂದಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

- ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ ಎಳೆದ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿದ್ದಾಗ ಆಯತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಆಯತಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ಸಾಂದ್ರತೆ ಆಧಾರವಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ರಚಿಸಬೇಕು.

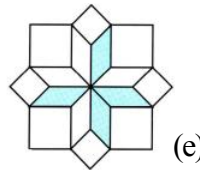
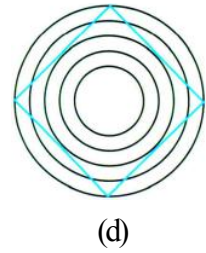
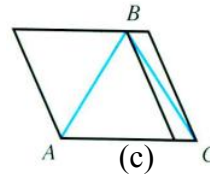
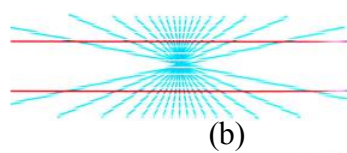
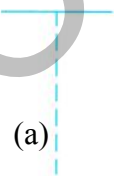
$$\text{ಆವೃತ್ತಿ ಸಾಂದ್ರತೆ} = \frac{\text{ವರ್ಗಾಂತರ ಆವೃತ್ತಿ}}{\text{ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ}} \times \text{ಕನಿಷ್ಠವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ}$$

- ವಿಚ್ಛಿನ್ನ / ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸಿದ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜ/ ವಕ್ರದಲ್ಲಿ X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು
- ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ರಚಿಸಿದ ಆಯತ ಚಿತ್ರ, ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮ.
- ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳ ಅಥವಾ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಎಳೆದ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾದ ವಕ್ರಗಳನ್ನು ಓಜಿವ್ ವಕ್ರ ಅಥವಾ ಆರೋಹಣ/ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

### ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.

ಕೆಲವು ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು, ಚಿತ್ರಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆಲೋಚನೆ ವಿಧಾನ, ಅಂತರ್ ದೃಷ್ಟಿಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ. ಕೊಟ್ಟ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಸರಿಮೋಡಿಕೊಳ್ಳಿ.

- ಅಡ್ಡರೇಖೆ, ಉದ್ದರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು?
- $l$  ಮತ್ತು  $m$  ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೇನು?
- $\overline{AB}$  ಅಥವಾ  $\overline{BC}$  ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು?
- ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಬಹುಭುಜಗಳಿವೆ? ಇದು ಚೌಕವೇನಾ?
- ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ನೋಡಿರಿ. ನಾಲ್ಕು ಸ್ತಂಭಗಳು ಮೇಲೆ ಬಂದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತಿವೆಯಾ? ಮತ್ತೆ ಸಣ್ಣ ಸ್ತಂಭಗಳು ಸಹ ಇವೆಯೇ? ಹೇಳಿರಿ.





## ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಪರಿಶೋಧನೆ

### 8.0 ಪರಿಚಯ

ನಾವು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವಿಧದ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಅನೇಕ ವಸ್ತುಗಳಿವೆ. ಇವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಅನ್ವಯಿಕೆ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿವೆ. ಕೆಲವು ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ನಾನಾವಿಧದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಮರೂಪಾಕೃತಿಗಳು ಕೆಲವು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು, ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಮಿತಿಯು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೀರಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು, ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಮಿತಿ ಆಕೃತಿಗಳು ಅಥವಾ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ?

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು, ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಮಿತಿ ಆಕೃತಿಗಳು ಅಥವಾ ಮಾದರಿಗಳು ನೀವು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ?



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಿಟಕಿಗಳ ಆಕಾರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರ್ವಸಮ, ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು ಮತ್ತು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಹಾಸಿರುವ ಕಲ್ಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸೂತ್ರಗಳು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುತ್ತವೆಂದು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

## 8.1 ಸರ್ವಸಮತೆ Congruency

ಒಂದೇ ಆಕಾರವು ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವುಳ್ಳ ವಸ್ತುಗಳು ಬಳಸುವುದನ್ನು ನಮ್ಮ ನಿಸ್ಸ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆ ಪ್ಯಾನು ರೆಕ್ಕೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.



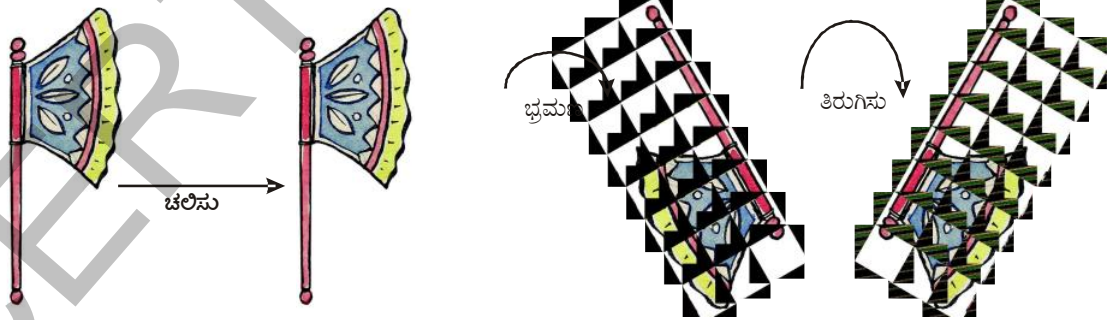
**ಸರ್ವಸಮ ಆಕಾರಗಳಿಗೆ ನಿಸ್ಸ ಜೀವನದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ:**

ಸಿಡಿಗಳು (C.D) ಮಾರುವ ಪಾಪಿಗೆ ಹೋಗಿ ಸಿ.ಡಿ ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ, ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ ? ಎಲ್ಲಾ ಸಿ.ಡಿಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದರ ಮೇಲೆಂದನ್ನು ಇಟ್ಟರೆ, ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಸಿ.ಡಿಗಳ ಮುಖಗಳು/ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲೆರಿ. ಸರ್ವ ಸಮ ಮುಖಗಳಿರುವ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.

### 8.1.1 ಆಕಾರಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

(i)



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳೆಲ್ಲವು ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲದಂತೆ, ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ವಸ್ತುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆಯಾ ?

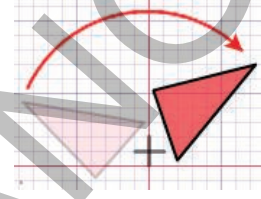
ಇಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಸ್ತುವನ್ನು ಚಲಿಸು, ಭ್ರಮಣಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ತಲೆಕೆಳಗಾಗಿ ತಿರುಗಿಸುವುದು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಬೀಸಣಿಕೆ ಕಟ್ಟಿಗೆಯು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದರಮೇಲೊಂದಿಟ್ಟರೆ, ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ.

ಅವೆಲ್ಲವೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಅವೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಆಕಾರ, ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವುಳ್ಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯಾ ?

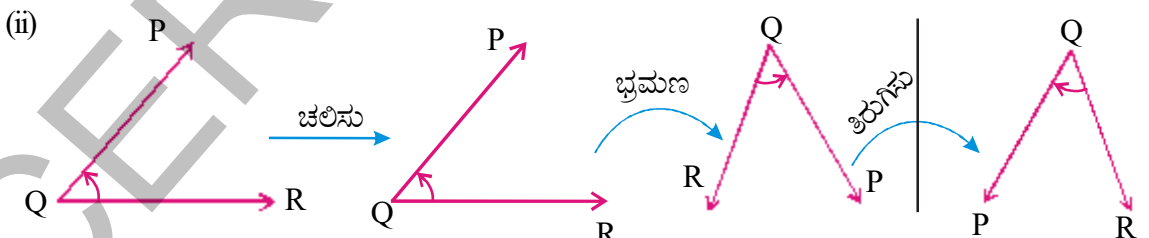
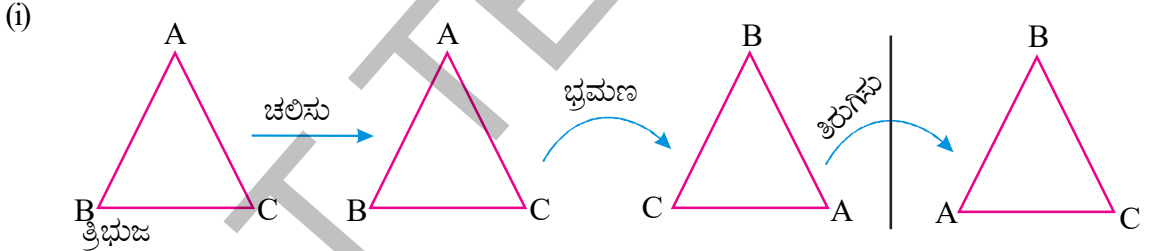
**ತಿರುಗಿಸುವಿಕೆ:** ತಿರುಗಿಸು ಎನ್ನುವುದು ಪರಿವರ್ತನೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮತಲ ಚಿತ್ರವು ತಿರುಗಿಸಲಾಗುವುದು ಅಥವಾ ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲನ ಮಾಡಿ ಅಸಲು ಚಿತ್ರದ ಪ್ರತಿಫಲನ ರೂಪ ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗುವುದು. ತಿರುಗಿಸಲಾದ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಫಲನ ಮಾಡಿದ ಚಿತ್ರದ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವು, ಆದರ ಪ್ರತಿಫಲನ ಚಿತ್ರದ ಪ್ರತಿ ಪರ್ಯಾಯ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಪ್ರತಿಫಲನ ರೇಖೆಗೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು.



**ಭ್ರಮಣ :** ಭ್ರಮಣ ಹೊಂದುವ ವಸ್ತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಲಾಗುವುದು. ಭ್ರಮಣದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ ಆಕಾರವಾಗಲಿ, ಭ್ರಮಣ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ದೂರದಲ್ಲಾಗಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಭ್ರಮಣ ಕೇಂದ್ರ ಸುತ್ತಲೂ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಬಿಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ತಿರುಗುವುದು. ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಭ್ರಮಣವು  $360^{\circ}$

**ಕೆಳಗಿನ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸು. :**



ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಧರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ, ಭ್ರಮಣ ಮತ್ತು ತಿರುಗಿಸುವ ಮೂಲಕ ಆದರ ಆಕಾರದಲ್ಲಿಯಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಬದಲಾವಣೆ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆವಿಲ್ಲ. ಪ್ರತಿ ಅನುಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳು ವಿವಿಧ ದಿಶೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಅವೆಲ್ಲವು ಸರ್ವಸಮವೇ ?

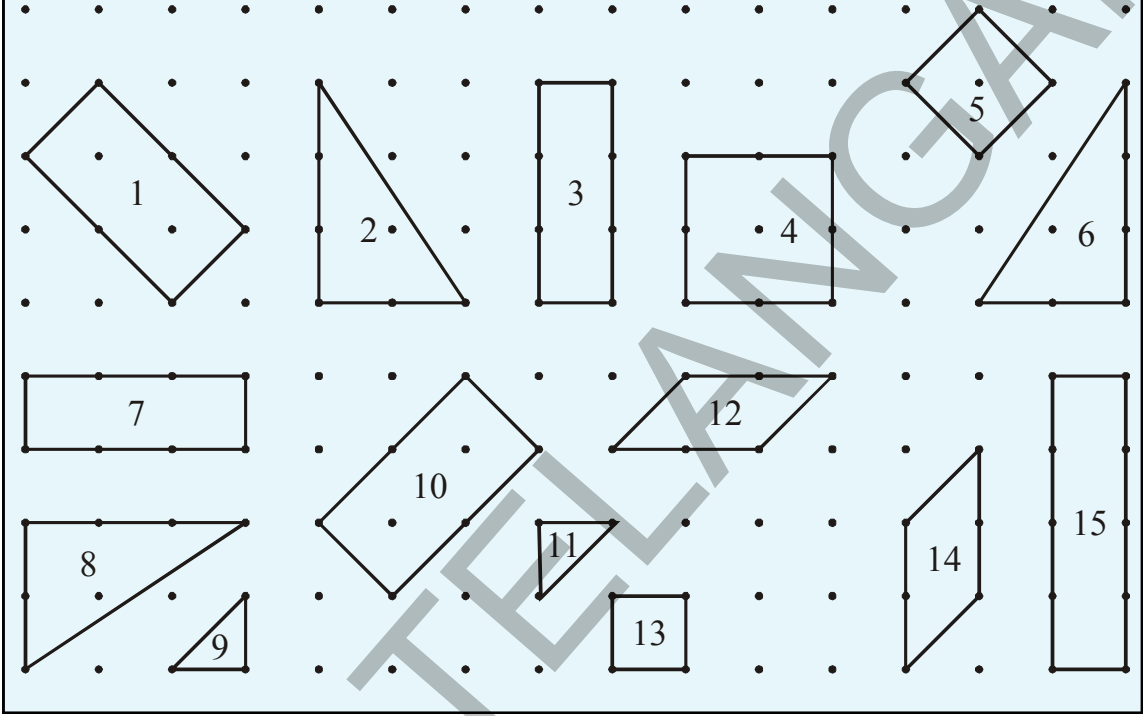
ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ. ಅವು ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೂ ಭ್ರಮಣ ಹೊಂದಿದರೂ ಅಥವಾ ತಿರುಗಿಸಿದರೂ ಅವುಗಳ ಸರ್ವ ಸಮಾನ ಹಾಗೆಯೇ ನಿಂತಿರುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಸರ್ವಸಮವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಗುರುತು  $\cong$  ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.



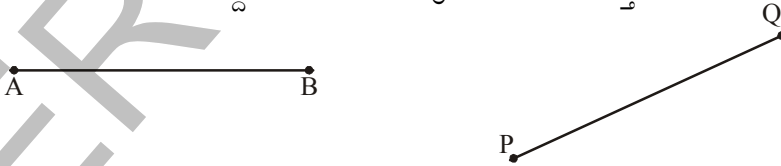
ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಸರ್ವಸಮಾಕೃತಿಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ



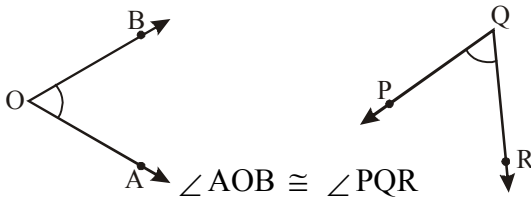
ಒಂದು ಜೊತೆ (a) ರೇಖಾಖಂಡಗಳು (b) ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು (c) ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಯಾವಾಗ ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆಯೇ ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಿ ?

(a) ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅವು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



$AB$  ಉದ್ದ =  $PQ$  ಉದ್ದ ಆದರೆ  $AB \cong PQ$

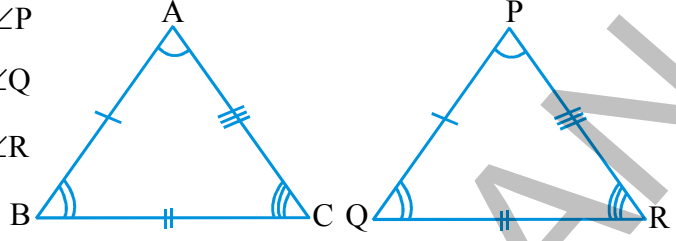
(b) ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅವು ಸರ್ವಸಮಗಳು



$\angle AOB \cong \angle PQR$

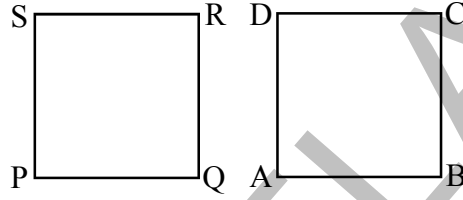
(c) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು  $\triangle ABC$  ಮತ್ತು  $\triangle PQR$  ಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ  $AB = PQ$  ಮತ್ತು  $\angle A = \angle P$   
 $BC = QR$   $\angle B = \angle Q$   
 $CA = RP$   $\angle C = \angle R$   
 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ .




ಮತ್ತೆರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು ?

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಎರಡು ಚೌಕಗಳು ABCD ಮತ್ತು PQRS. ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ನಾವು ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಚೌಕದ ಮೇಲಿಟ್ಟರೆ, ಅಂದರೆ ABCD ಯನ್ನು PQRS ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗಬೇಕು.



ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಅಂಚುಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಆಗ ಮಾತ್ರವೇ ಆ ಎರಡು ಚೌಕಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯಾಕೃತಿಗಳು ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಅದೇವಿಧವಾಗಿ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ

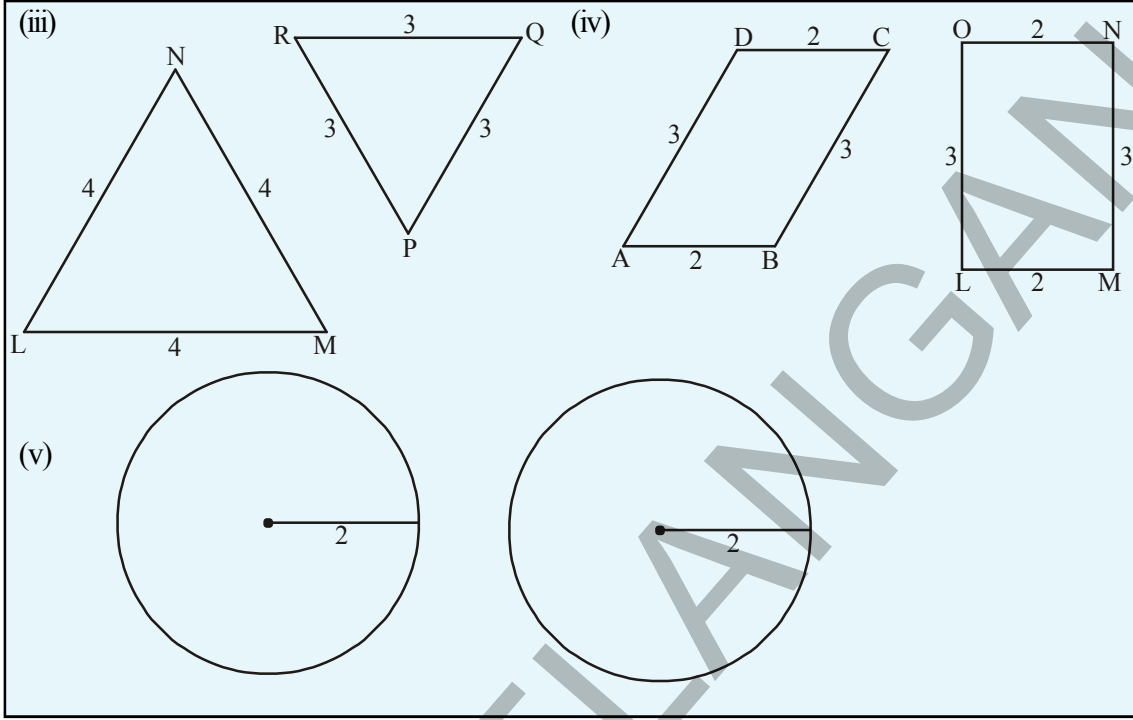


ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ :

ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಅವು ಸರ್ವಸಮವೇ ತಿಳಿಸಿ. ಕಾರಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೆಸರುಗಳಿಂದ ಹೇಳಿ.

(i)

(ii)



### 8.1.2 ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು

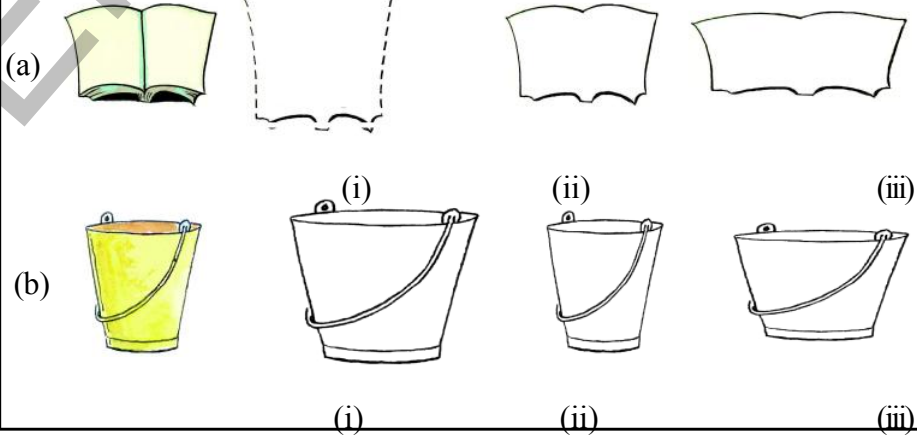
ನಮ್ಮ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪರಿಸರಗಳಿಂದ ಅನೇಕ ಆಕೃತಿಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಆನೆ, ಹುಲಿ, ಮನೆಕಟ್ಟಡದ ಪ್ಲಾನುಗಳು, ಮೈಕ್ರೋಚಿಪ್ ಗಳ ನಮೂನೆ ಚಿತ್ರಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಅಸಲು ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆಯಾ? ಆ ರೀತಿಯಾಗಿ ಎಳೆದಿಲ್ಲ ಅವು ಅಸಲು ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಲು, ಯಾವಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಆಕೃತಿಗಳು ವಾಸ್ತವವಾದ ರೂಪಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಯೂ ಇನ್ನೊಕೆಲವು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

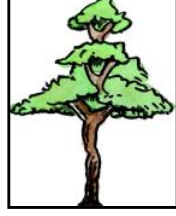


ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.



ಒಂದು ಗಿಡದ ಚಿತ್ರ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಪುನಃ ಎಳೆದಿರುವ ಚಿತ್ರ ಆಸಲು ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು?

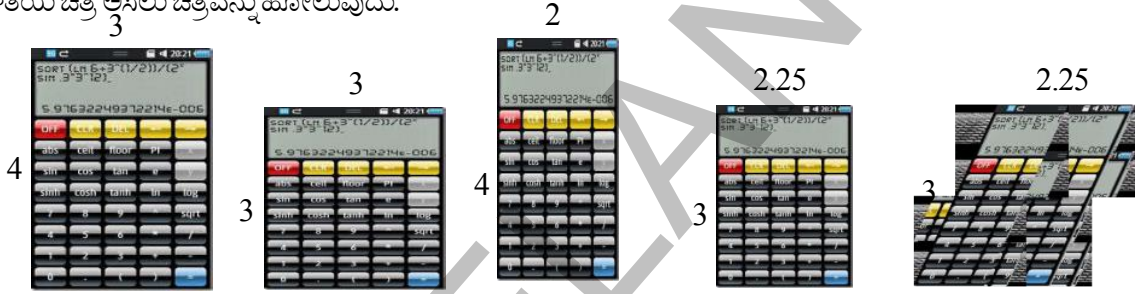


ಆಸಲು ಚಿತ್ರ



ಬಿಡಿಸಿದ ಚಿತ್ರ

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತು ವಿನ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದ ಆಕೃತಿಯ ಚಿತ್ರ ಆಸಲು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೋಲುವುದು.



ಆಸಲು ಚಿತ್ರ

1ನೇ ತಗ್ಗಿಸಿದ ಚಿತ್ರ

2ನೇ ತಗ್ಗಿಸಿದ ಚಿತ್ರ

3ನೇ ತಗ್ಗಿಸಿದ ಚಿತ್ರ

4ನೇ ತಗ್ಗಿಸಿದ ಚಿತ್ರ

ಆಕೃತಿಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಮೂರನೇ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದ ಆಕೃತಿಯ ಚಿತ್ರ ಆಸಲು ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಕೆ ಇದೆಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು.

ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ ?

$$\frac{\text{ವಸ್ತುವಿನ ಆಸಲು ಉದ್ದ}}{\text{ತಗ್ಗಿಸಿದ 3 ರಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಉದ್ದ}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{ವಸ್ತುವಿನ ಆಸಲು ಅಗಲ}}{\text{ತಗ್ಗಿಸಿದ 3 ರಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಅಗಲ}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3 \times 4}{2.25 \times 4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

ನಾವು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಅವು ಲಂಬಕೋನಗಳು

ಆದ್ದರಿಂದ “ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕೆಂದು” ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೇವೆ.

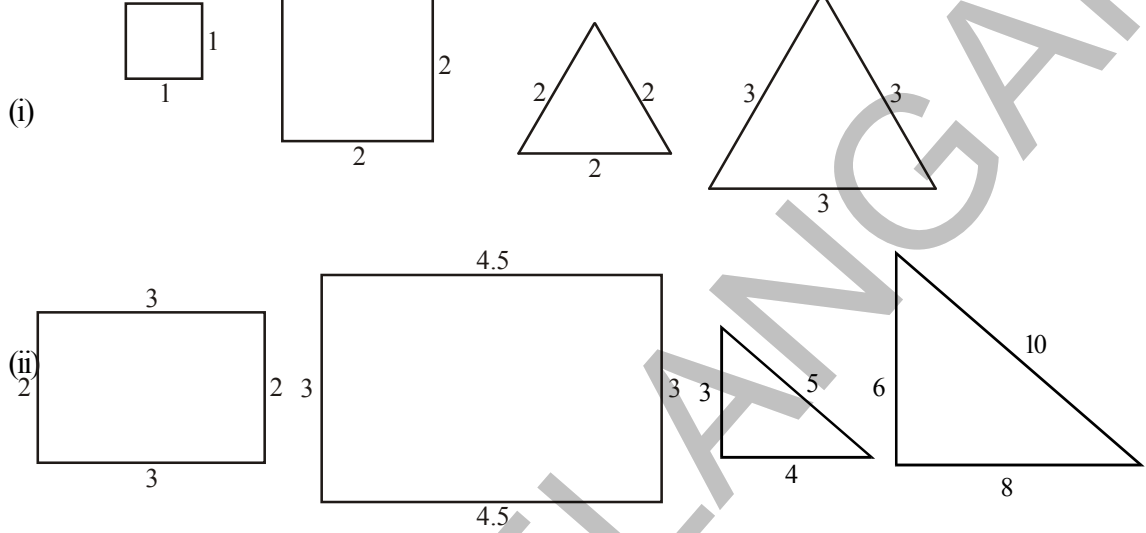
ಇತರ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 8.1.3 ಸಮರೂಪ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ ?

ಇಂಜಿನಿಯರು ತಾವು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಮನೆಕಟ್ಟಡಗಳಿಗೆ ಸಮರೂಪದ ಮಾದರಿಯ ಚಿತ್ರಗಳು ಎಳೆಯುವರು. ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಆಪರೇಟರ್ ಬ್ಯಾನರ್‌ಗಳ ಮೇಲೆ ಇರಬೇಕಾದ ಚಿತ್ರಗಳ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಛಾಯಾ ಚಿತ್ರಗಾರ ಚಿತ್ರಗಳ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತ ನಿಯಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರೂಪವು ಬದಲಾಗದಂತೆ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿಯೂ, ದೊಡ್ಡದಾಗಿಯೂ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಲಕರಣೆಯ ಚಿತ್ರಗಳು, ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲಾದ ದೇಶಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳು ಈ ಸಮಾನುಪಾತ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ಎಳೆದಿವೆ. ಅಂದರೆ ಅವು ಆಸಲು ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಮರೂಪಗಳು.

ಸಮರೂಪ ತೆಯನ್ನು ಸರಿನೋಡುವುದು :

ಕೊಟ್ಟ ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳ ಮಧ್ಯದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಮಧ್ಯದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಿ ?



ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಗಳಿಂದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

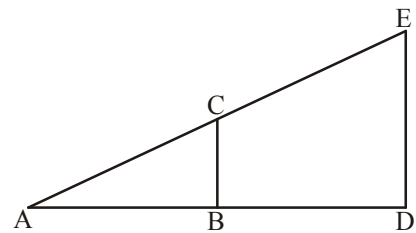
ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ	ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು
(i) ಚೌಕ = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ) = (90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$
(ii) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ = $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$
(iii) ಆಯತ = $\frac{2}{3} = \dots\dots\dots$	$(90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ) = (90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$
(iv) ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ = $\frac{3}{6} = \dots\dots\dots$	$(\dots\dots, \dots\dots, \dots\dots) = (\dots\dots, \dots\dots, \dots\dots)$

ಎಲ್ಲಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು  $\triangle ABC$  ಮತ್ತು  $\triangle ADE$  ಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು ಇದನ್ನೇ ನಾವು  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ . ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.  $\triangle ABC$  ಯನ್ನು  $\triangle ADE$  ಮೇಲಿನ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿವೆ.

ಅಂದರೆ  $\angle A \cong \angle A$   
 $\angle B \cong \angle D$  (ಏಕೆ ?)  
 $\angle C \cong \angle E$  (ಏಕೆ ?)

ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮವಾಗಿದೆ.





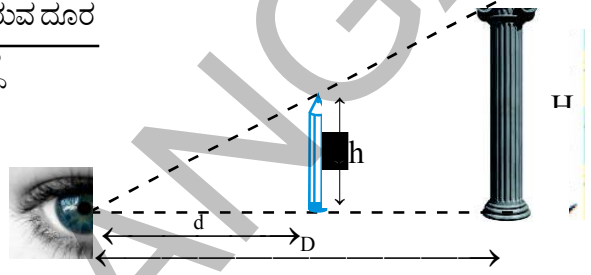
ಅಂದರೆ  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

“ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪ”ನಿಯಮವು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗ ವಾಗುವುದೆಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಗಮನಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ವಿವರಣೆ :** ಒಂದು ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಹುಡುಗಿ ತನ್ನೆದುರುಗೆ ಇರುವ ಸ್ತಂಭದ ಕಡೆ ತನ್ನ ತೋಳನ್ನು ಚಾಚಿ ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಹಿಡಿದು ಕೊಂಡು ನಿಂತಿರುವಳು. ಆಕೆ ತನ್ನ ಕೈಯಲ್ಲಿನ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ಏಕೀಭವಿಸುವಂತೆ (ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಗಮನಿಸಿದಳು. ಈ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ.

$$= \frac{\text{ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ}}{\text{ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಎತ್ತರ}} \frac{(H)}{(h)} = \frac{\text{ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಹುಡುಗಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ}}{\text{ಹುಡುಗಿಯ ಕೈ ಉದ್ದ}}$$

ಪೆನ್ಸಿಲ್ ನ ಉದ್ದ, ಹುಡುಗಿ ಕೈ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯಿಂದ ಸ್ತಂಭದ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆದು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬಹುದು.



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :**

ಚಾಚಿದ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥೇಲನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ನಿಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲೆಯ ಕಟ್ಟಡ ಏಕೀಭವಿಸುವಂತೆ ಪಾಠಶಾಲೆಯಿಂದ ದೂರವಾಗಿ ಜರುಗುತ್ತಾ ಸರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ ಇದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದು ಪಾಠಶಾಲೆಯ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ  $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ , ಮತ್ತು  $\angle C = 53^\circ$ . ಆದರೆ PR ಬಾಹುವನ್ನು ಮತ್ತು  $\angle P$ ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**  $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪಕೋನಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಸಮ

$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5} = \frac{2}{4}$$

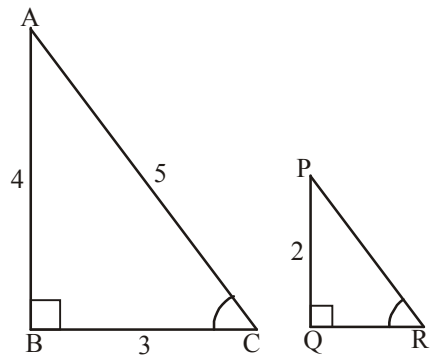
$$PR = \frac{2}{4} \times 5 = 2.5$$

ಮತ್ತೆ  $\angle R = \angle C = 53^\circ$

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ  $180^\circ$

ಅಂದರೆ  $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$

$$\angle P + 90^\circ + 53^\circ = 180^\circ$$



$$\angle P = 180^\circ - 143^\circ = 37^\circ$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ಚೌಕಗಳು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಸಮರೂಪಗಳೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಿ? ವಿವರಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

**ಪರಿಹಾರ:** ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 4 ಸೆ.ಮೀ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. ಎಲ್ಲಾ

$$\text{ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ಎಲ್ಲಾ ಜೊತೆಗಳ ಅನುರೂಪಕೋನಗಳು  $90^\circ$  ಗೆ ಸಮ

ಆದ್ದರಿಂದ  $\square ABCD \sim \square PQRS$

$$\square ABCD \text{ ಸುತ್ತಳತೆ} = 4 \times 2 = 8 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$\square PQRS \text{ ಸುತ್ತಳತೆ} = 4 \times 4 = 16 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$\begin{aligned} \text{ಸುತ್ತಳತೆ ಗಳ ಅನುಪಾತ} &= 8 : 16 \\ &= 1 : 2 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ "ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಅನುಪಾತ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ"

$$ABCD \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 2 \times 2 = 4 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

$$PQRS \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 4 \times 4 = 16 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

$$\text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ} = 4 : 16 = 1 : 4 = 1^2 : 2^2$$

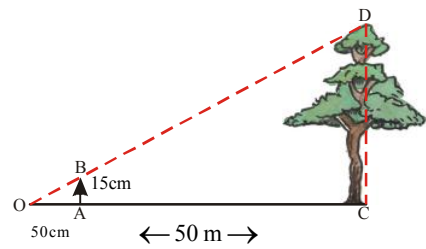
$\therefore$  ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹು ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** ಜಗದೀಶ್ ಒಂದು ಗಿಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಆಂದಾಜು ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ಕೈಯಿಂದ 50 ಸೆ.ಮೀ ದೂರದಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ತನಗೆ ಎದುರುಗಡೆ ಇರುವ ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮುಚ್ಚುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾ ಆದರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಎಳೆದನು. ಗಿಡದ ಎತ್ತರ ಸ್ಥಳೀಯ ಮೇಲೆ 155 ಮೀ. ಸರಿಹೋಗಿದೆ. ಅವನಿಂದ ಗಿಡದ ದೂರ 50 ಮೀ ಗಳಾದರೆ ಗಿಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಚಿತ್ರದಿಂದ  $\triangle OAB \sim \triangle OCD$

ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$

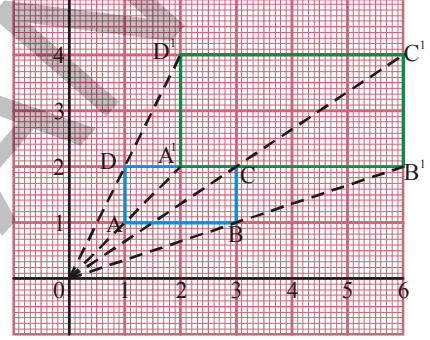


$$\therefore \frac{1}{15} = \frac{0.85}{CD} \Rightarrow CD = 0.85 \times 15 = 12.75 \text{ ಮೀ}$$

$\therefore$  ಮರದ ನಿಜವಾದ ಎತ್ತರ = 12.75 ಮೀ

## 8.2 ಸಮರೂಪ ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆ (Dilations: )M

ಕೆಲವು ಸಲ ನಾವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ವಾಸ್ತವವಾದ ಗಾತ್ರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಎಳೆಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಿನಿಮಾ ಕಣೌಟ್ ನೀವು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಲ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಎಳೆಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಸಲು ಗಾತ್ರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ನಾವು ಚಿತ್ರಗಳ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡುವ, ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಅವಸರ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸಮರೂಪ ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆ ಎನ್ನುವರು.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD, ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ABCD ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೃಂಗಗಳು A, B, C, ಮತ್ತು D ಗಳನ್ನು 'O' ನಿಂದ ಸೇರಿಸಿ ಅವುಗಳ ಎರಡರಷ್ಟು ದೂರಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ A<sup>1</sup>, B<sup>1</sup>, C<sup>1</sup> ಮತ್ತು D<sup>1</sup> ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ A<sup>1</sup>, B<sup>1</sup>, C<sup>1</sup>, D<sup>1</sup> ಗಳು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ABCD ಗೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಆಯತವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿ ಇಲ್ಲಿ, O ಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆಯ ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಮತ್ತು  $\frac{OA^1}{OA} = \frac{2}{1} = 2$  ನ್ನು ಸೂಚಿ ಭಿನ್ನವೆಂದು (Scale Factor) ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



### ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

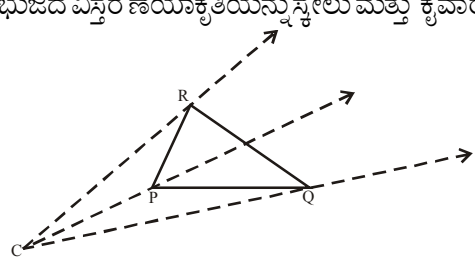
1. ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆದು ಸೂಚಿಭಿನ್ನ -3. ಯಾಗಿರುವ ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಗಳೇ?
2. ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನೆಳೆದು ಸೂಚಿ ಭಿನ್ನಗಳು - 4, 5 ಯಾಗಿರುವ ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

### 8.2.1 ಸಮರೂಪ ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆಯ ರಚನೆ :

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಸೂಚಿ ಭಿನ್ನ - 2 ಇರುವಂತೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಸ್ಕೇಲು ಮತ್ತು ಕೈವಾರ ಮಾತ್ರವೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಿ

**ಪರಿಹಾರ :**

**ಹಂತ 1:**  $\Delta PQR$  ನ್ನು ರಚಿಸಿ, ತ್ರಿಭುಜದ ಮೇಲಿರದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು 'C' ಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಣೆ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿ. 'C' ಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ



ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿ ಮುಂದಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

**ಹಂತ 2:**

ಕೈವಾರಸಹಾಯದಿಂದ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ

$$CP^1 = k (CP) = 2 CP$$

$$CQ^1 = 2 CQ$$

$$CR^1 = 2 CR$$

ಅಗುವಂತೆ  $P^1, Q^1$  ಮತ್ತು  $R^1$

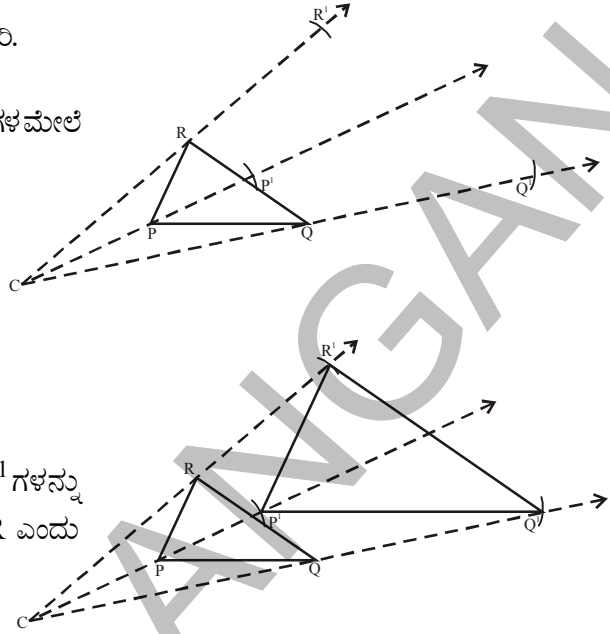
ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

**ಹಂತ 3:**

$P^1Q^1, Q^1R^1$  ಮತ್ತು  $R^1P^1$ ಗಳನ್ನು

ಸೇರಿಸಿರಿ.  $\Delta P^1Q^1R^1 \sim \Delta PQR$  ಎಂದು

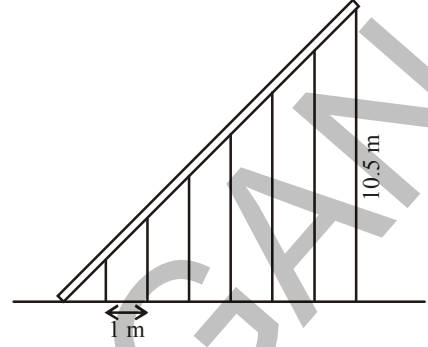
ಗಮನಿಸಬಹುದು.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 8.1

- ಪ್ರತಿದಿನ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂರು ಜೊತೆಗಳ ಸರ್ವಸಮ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.
- (a) ಎರಡು ಸರ್ವಸಮಾನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಸಮರೂಪದಲ್ಲಿವೆಯಾ? ವಿವರಿಸಿ.  
(b) ಎರಡು ಸಮರೂಪಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕದಲಿಸಿದರೂ, ಭ್ರಮಣ ಹೊಂದಿಸಿದರೂ ಅಥವಾ ತಿರುಗಿಸಿದರೂ ಅವು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆಯಾ?
- $\Delta ABC \cong \Delta NMO$  ಆದರೆ ಅನುರೂಪಬಾಹುಗಳು, ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಜೋತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.
- ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.
  - 3 ಸೆ.ಮೀ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಚೌಕಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು  $45^\circ$  ವರೆಗೂ ಭ್ರಮಣ ಹೊಂದಿಸಿದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮಗಳು.
  - 5 ಸೆ.ಮೀ ಕರ್ಣಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮಾನವಾಗಿವೆ.
  - 4 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳು.
  - 4 ಸೆ.ಮೀ ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು  $\Delta ABC$  ಮತ್ತು  $\Delta LHN$  ಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳಲ್ಲ.
  - ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳು ಸರ್ವಸಮಾನವಾಗಿವೆ.
- ಒಂದು ಚೌಕ ಚುಕ್ಕೆ ಕಾಗದದ ಬಿಂದು ಮೇಲೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ವಿವಿಧ ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮಾನಾಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಾಕೃತಿಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
- ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಚೌಕದ ಬಿಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅನುಪಾತಗಳಿಂದ ಹೋಲಿಸಿರಿ.

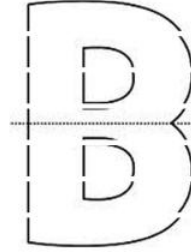
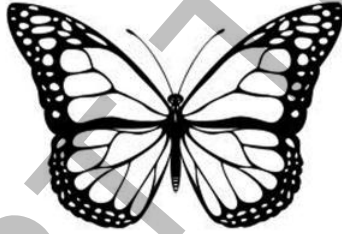
7. ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಡ್ಡಿ 7 ಸ್ತಂಭಗಳ ಮೇಲೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಆ ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳ ಮಧ್ಯದೂರ 1 ಮೀಗೆ ಸಮಾನ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ 10.5 ಮೀಗಳಾದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ತಂಭಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



8. 3 ಮೀ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬ ಸ್ತಂಭದಿಂದ 5 ಮೀ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತು, ಸುಧ, ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಳು. ಕಟ್ಟಡ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಗಳ ಮಧ್ಯದೂರವು 10 ಮೀಗಳಾದರೆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ. ( ಸುಧಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೇ)
9. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಎಳೆಯಿರಿ. ಸೂಚಿಬಿನ್ನ-3 ಇರುವಂತೆ ಅದರ ವಿಸ್ತರಣಾಕೃತಿಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಆ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಸರಿನೋಡಿ

### 8.3 ಸಮಮಿತಿ :

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಧಭಾಗಕ್ಕೆ ಮಡಿಚಿದಾಗ, ಪ್ರತಿ ಅರ್ಧಭಾಗವು ಎರಡನೇ ಅರ್ಧಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.



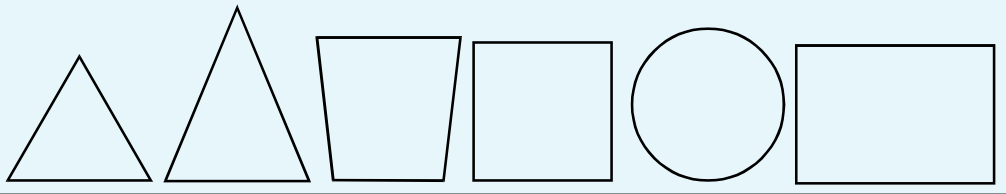
ಇಂತಹ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ? ಒಂದು ಅರ್ಧಭಾಗ ಎರಡನೇ ಅರ್ಧಭಾಗದಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತಿದ್ದು ಆ ರೇಖೆಯ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಮಡಚಿ ಇದೆಯೇ. ಆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲೆತಿರುವದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವೆಯಾ?

ಇಂತಹ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಸಮಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳೆನ್ನುವರು ಮತ್ತು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಎರಡು ಅರ್ಧ ಚಿತ್ರಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷ ಅಥವಾ ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆ ಎನ್ನುವರು.

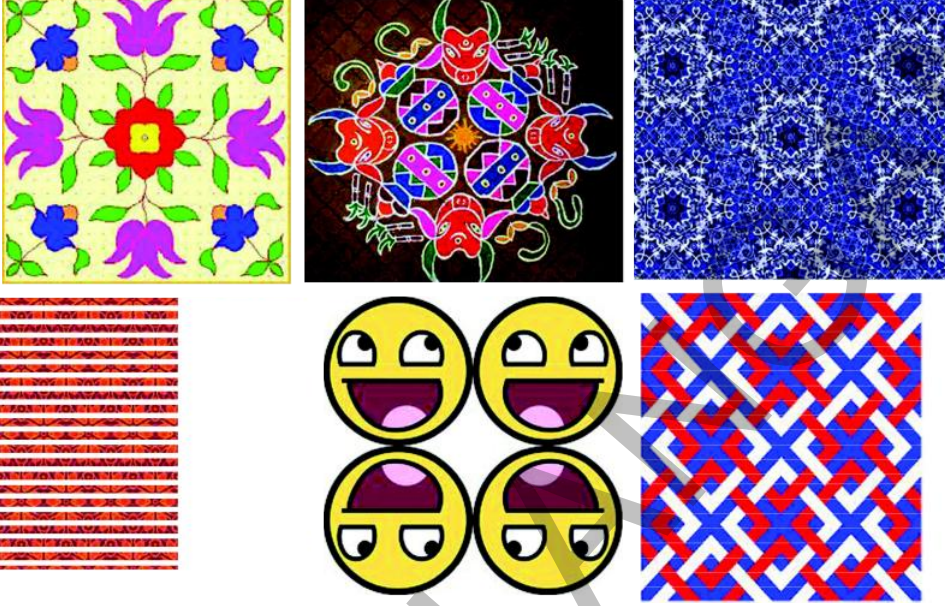


#### ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆಕಾರಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಮಮಿತಿ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.



ಈ ವಿನ್ಯಾಸಗಳೆಲ್ಲವೂ (Designs) ಎಲ್ಲಾ ವಿಧ ಬಗೆಯ ಸಮಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾದವೇ.

ಇಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನಾಯಿಯ ಮುಖ 'ಪೋಟೋಮ್ಯಾಜಿಕ್' ನ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿ ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ, ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಳೆದಿರುವ ನಿಲುವು ರೇಖೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?



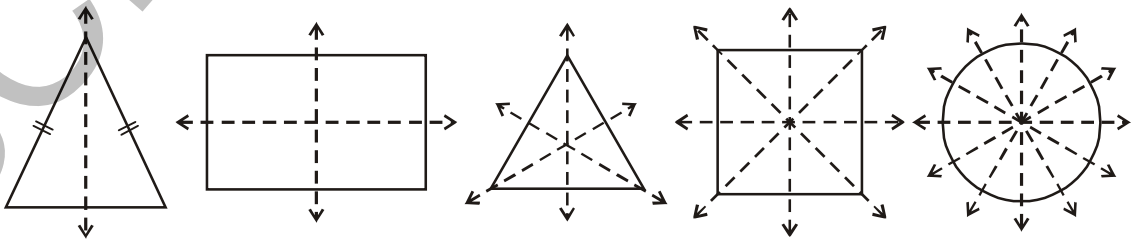
ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

ಒಂದು ಬೆಟ್ಟ/ಗುಡ್ಡದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ದೊಡ್ಡ ಕೆರೆ (ಕೋಳೆ) ಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದೂ ಸಹ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಸಮಮಿತಿಯೇ. ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷವು ಬೆಟ್ಟ ಮತ್ತು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಿರುವ ಅಡ್ಡರೇಖೆ. ಮನುಷ್ಯನು ಇದರಿಂದ ಈ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಮಮಿತಿ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗದಿರಬಹುದು.



8.3.1 ಭ್ರಮಣ ಸಮಮಿತಿ :

ಕೆಲವು ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ :



ವಿವಿಧ ಆಕೃತಿಗಳು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಒಂದು ಭ್ರಮಣ ಮಾಡಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಂತಿರುವವೋ ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಆಯತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸಮಮಿತಿ ರೇಖೆಗಳಿವೆ/ ಅಕ್ಷಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಆಯತವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಒಂದು ಭ್ರಮಣವು ಮಾಡಿದರೆ, ಎರಡು ಸಲ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದ ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ನ್ನು ನಾವು ಭ್ರಮಣ ಕ್ರಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಿಮ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಮೋದಿಸಿ.

ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರ	ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಹೋಲಿದ ಸ್ಥಿತಿಗಳೆಂದು ವ ಸಂಖ್ಯೆ	ಭ್ರಮಣದ ಕ್ರಮ
ಸಮದ್ವಿ ಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ	.....	.....	.....
ಆಯತ	2	2	2
ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ	.....	.....	.....
ಚೌಕ	.....	.....	.....
ವೃತ್ತ	.....	.....	.....

### ಆಲೋಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ



1. ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯಾಕೃತಿಯ ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಭ್ರಮಣ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು ?
2. ಒಂದು ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗೆ ಇರುವ ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಭ್ರಮಣ ಸಮಮಿತಿ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

### 8.3.2 ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿ

ಷಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಇದಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ಸಮಮಿತಿ ಇದೇಯಾ? ಈ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ಸಮಮಿತಿ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿದೆ. ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಕ್ಕೆ ನೋಡಿದರೂ ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ನೋಡಿದರೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿದೆ. ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಗಳಿಂದ ನೋಡಿದರೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 'ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿ' ಎನ್ನುವರು. ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಭಾಗವು ಹೋಲಿದ ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅದರ ಮಧ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೂ, ಆ ರೇಖೆಯ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಭಾಗಗಳಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಅರ್ಧ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಸರಿನೋಡಿರಿ. ಈ ಚಿತ್ರ ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿದೆ ಎನ್ನುವರು.

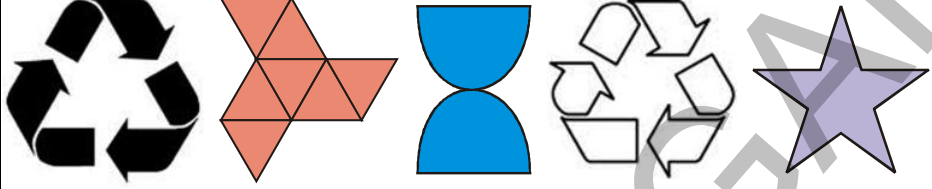


**X H I S N Z**



ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ



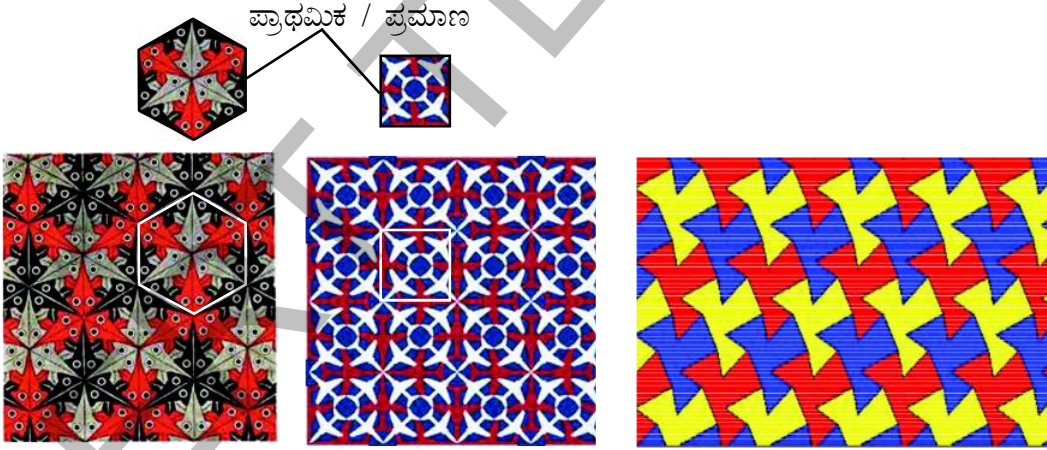
2. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾ ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಚಿತ್ರಗಳಾವುವು?

3. ರೇಖಾಸಮಮಿತಿಗೆ ಮತ್ತು ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿಗೆ ಮಧ್ಯವಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

### 8.3.3 ಸಮಮಿತಿಯ ಅನ್ವಯಿಕೆ :

- ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಅನೇಕ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
- ಯಂತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಬಹಳ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಉತ್ಪತ್ತಿ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :



ಈ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸುವೆ? ಈ ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಸಂಕಲ್ಪಿಸುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ನಿಯಮಿತ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಹೇಗೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ?

ಈ ಮಾದರಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳು ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಅದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಖಾಲಿ ಇರದಂತೆ ಅಥವಾ ಸಂದು (ಬಿರುಕು) ಇರದಂತೆ ಪಕ್ಕದಲ್ಲೇ ಜೋಡಿಸಿರುವುದರಿಂದ ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಜೋಡಣೆ (ಟೆಸ್ಟಲೇಷನ್) ಎನ್ನುವರು. ಇದು ಚಿತ್ರಗಳ ಸೌಂಧರ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದು.

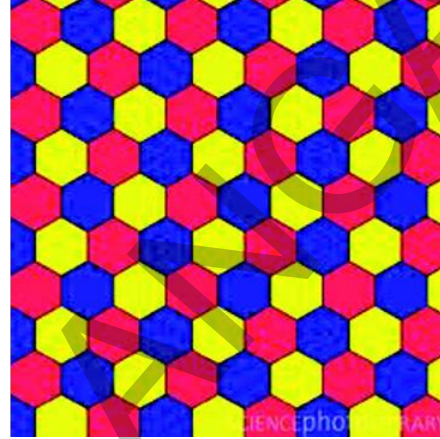
ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿವೆಯಾ?

ಈ ಟೆಸ್ಟಲೇಷನ್ ರಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿವೆಯಾ?



ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಚಿತ್ರ (a) ನಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಮಮಿತಿಯು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಚಿತ್ರ (b) ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಮಮಿತಿಯು ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದದೆ ಇರುಬಹುದು.

ಮತ್ತೇ ಈ ಕೆಳಗಿನ 'ಟೆಸ್ಲೆಷನ್' ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪ್ರಾಥಮಿಕಾಕೃತಿಗಳು ಯಾವುವು.



ಚಿತ್ರ (a)

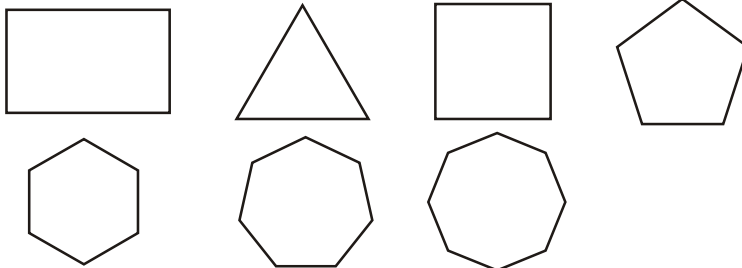
ಚಿತ್ರ (b)

ಈ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪಂಚ ಭುಜಾಕೃತಿಗಳು, ಆಯತಗಳು, ಚೌಕಗಳು, ಮತ್ತು ಸಮ ಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಯಾವ ಟೆಸ್ಲೆಷನ್ ಗಳಾದರೂ ಈ ಆಕೃತಿಗಳಿಂದಲೇ ರೂಪೊಂದಿಸುತ್ತಾರೆ



ಅಭ್ಯಾಸ - 8.2

- ಅಂಗಳ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂಟಿಸಿ. ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಷ್ಟು ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
  - ರೇಖಾ ಸಮಮಿತಿವಿಲ್ಲದ ಅಕ್ಷರಗಳೆಷ್ಟು ?
  - ಒಂದೇ ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳೆಷ್ಟು ?
  - ಎರಡು ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳೆಷ್ಟು ?
  - ಎರಡುಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳೆಷ್ಟು ?
  - ಯಾವ ಅಕ್ಷರಗಳು ಭ್ರಮಣ ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ?
  - ಯಾವ ಅಕ್ಷರಗಳು ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ?
- ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ, ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿಗಳ ಮಧ್ಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯಾ ?



3. ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸಮಮಿತಿ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮುಖಗಳಿರುವ ಕೆಲವೊಂದನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.
4. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಟೆನ್ಸೋನ್ ಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಚಿತ್ರಗಳು ಹೆಸರಿಸಿ.

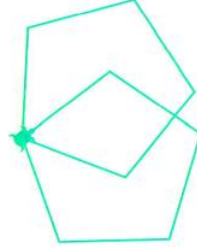


### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು:

- ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರಗಳಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳೆನ್ನುವರು.
- ಗಾತ್ರಗಳು ಬೇರೆಯಾದರೂ ಒಂದೇ ಆಕಾರವಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು.
- ನಾವು ಸರ್ವಸಮ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕದಲಿಸಿದರೂ, ಭ್ರಮಣ ಮಾಡಿದರೂ ಅಥವಾ ತಿರಿಗಿಸಿದರೂ ಸರ್ವಸಮಾನತೆ ಅಥವಾ ಸಮರೂಪತೆ ಹಾಗೆಯೇ ಇರುತ್ತವೆ.
- ಚಿತ್ರಗಳು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಹೊಂದಿರಬಹುದು.
- ಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಿಧವಾದ ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.
- ಸಮಮಿತಿ ಮೂರು ವಿಧಗಳು ಅವು ಬಿಂದು ಸಮಮಿತಿ, ರೇಖಾಸಮಮಿತಿ, ಮತ್ತು ಭ್ರಮಣ ಸಮಮಿತಿ.
- ಭ್ರಮಣ ಸಮಮಿತಿವಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಭ್ರಮಣ ಮಾಡಿದರೆ ಅವು ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಿತಿಗೆ (ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ) ಹೋಲಿದ ಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬರಬಹುದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭ್ರಮಣ ಸಮಮಿತಿ ಕ್ರಮವೆನ್ನುವರು.
- ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹೋಲಿದ ದೊಡ್ಡ ಅಥವಾ ಚಿಕ್ಕ ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವಿಕೆ (Dilation) ಎನ್ನುವರು. ಒಂದೇ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪಕ್ಕ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಇರದಂತೆ ಅಥವಾ ಸಂದು ಇರದಂತೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುವಂತೆ ಹೊಂದಿಸುವುದೇ ಟೆನ್ಸೋನ್ ಎನ್ನುವರು.

### ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಭ್ರಮಣ :

n ಬಾಹುಗಳು ಹೊಂದಿದ ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಪದ್ಧತಿಯು ಉಪಯೋಗಕರ.



ಸಂಪೂರ್ಣ ಭ್ರಮಣದಲ್ಲಿ ಪುನಾರಾವೃತ್ತವಾಗುವ ಸ್ಥಿತಿಗಳು (ಸ್ಥಾನಗಳು) ಕಲ್ಪಿಸುವ ಮೂಲಕ ಆಸಕ್ತಿಕರ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.  $360^\circ$  ನ್ನು ಪುನಾರಾವೃತ್ತ ಸ್ಥಿತಿಗಳು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭ್ರಮಣಕೋನ ವಿರುತ್ತದೆ.

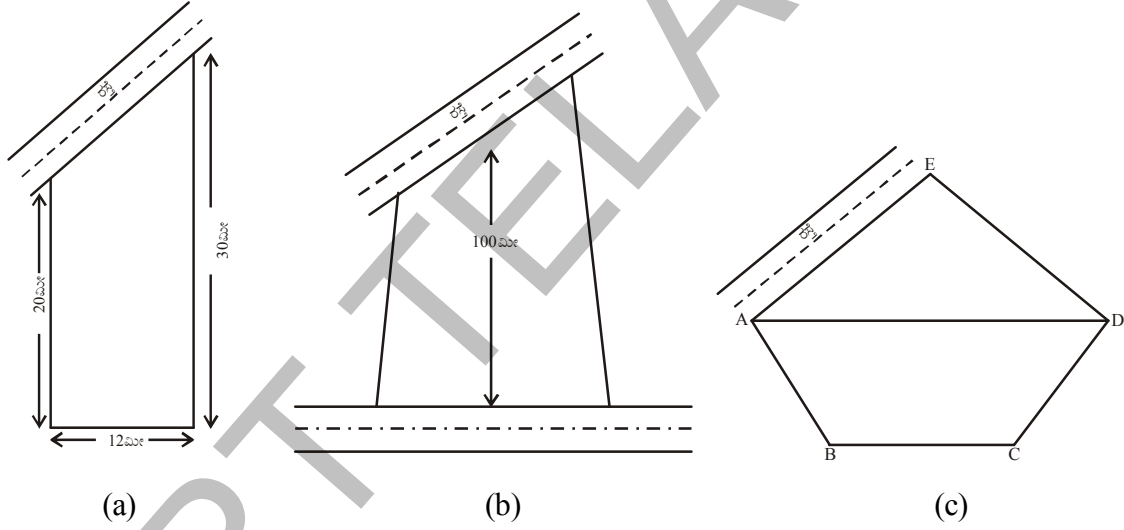


ಚೌಕವನ್ನು ಅದರ ಜೋಡಿಸುವ ಮಧ್ಯವಿಂದುವಿನ ಆಧಾರವಾಗಿ ಭ್ರಮಣ ಮಾಡಿದರೆ ಬರುವ ಆಕೃತಿಗಳು ಹೇಗಿರುತ್ತವೆ ?

## ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

### 9.0 ಪೀಠಿಕೆ :

ದೇವರ್ಷ ಒಂದು ನೀವೇಶವನ್ನು ಮನೆಕಟ್ಟಿಸಲು ಖರೀದಿಸ ಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು ಸಂದರ್ಶಿಸಿದ ಕೆಲವು ಜಾಗಗಳ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.1

ಜಾಗ (a) ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಾ ಕಾರದಲ್ಲಿದೆ; ಜಾಗ (b) ಚತುರ್ಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಜಾಗ (c) ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿ ಅಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಇಂತಹ ಸ್ಥಳಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಮನೆ ಕಟ್ಟಲು ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಅಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ ಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ.

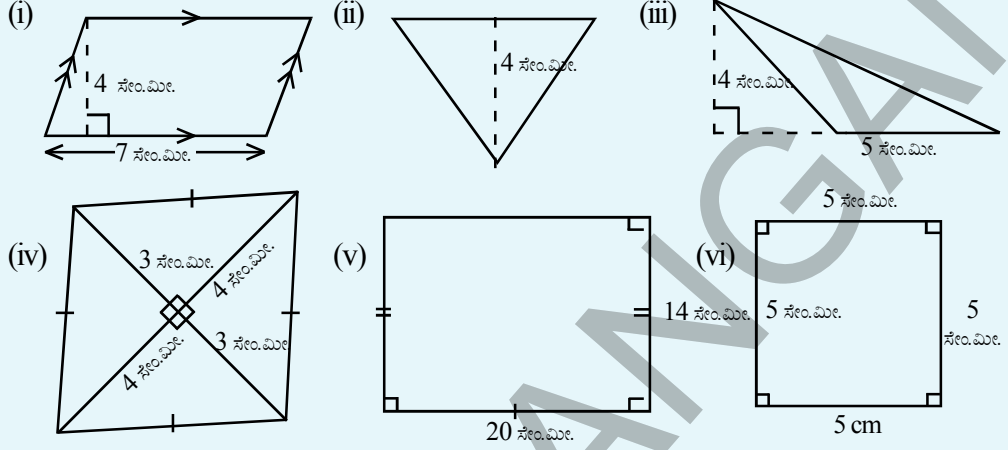
ನಾವು ಆಯತ, ಚೌಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭು

ಜ, ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ವಜ್ರಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ನಾವು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ, ಚತುರ್ಭುಜ, ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ. ನಾವು ಮೊದಲು ಕಲಿತ ಅಯತ, ಚೌಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ವಜ್ರಾ ಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಮಾಡೋಣ.



## ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



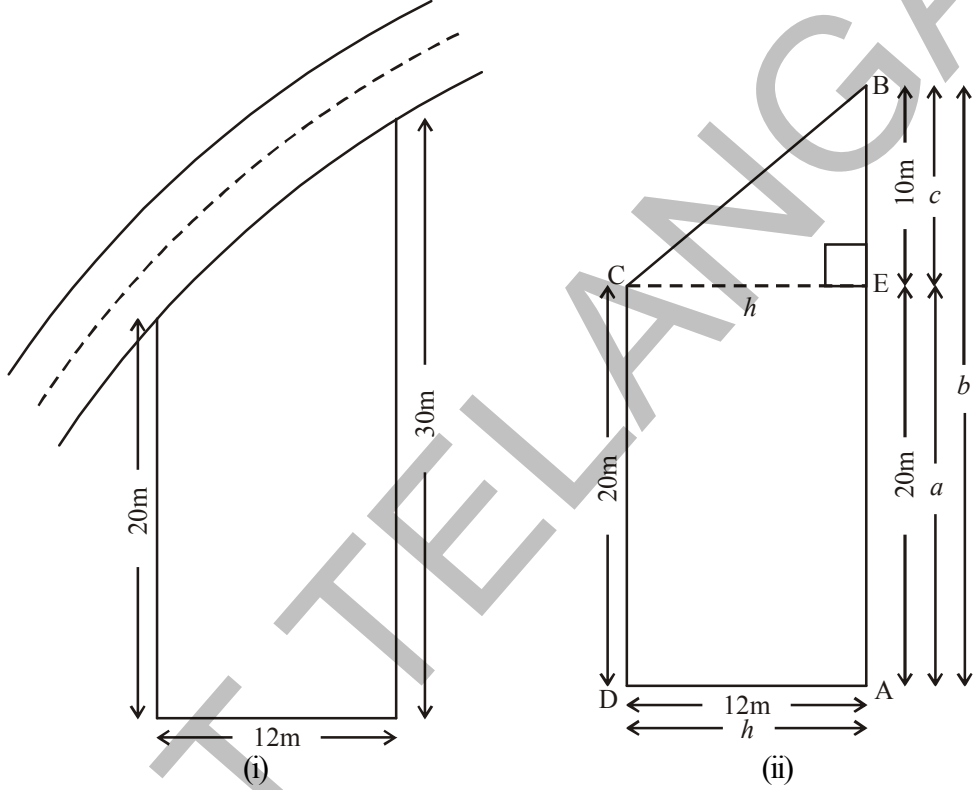
ಚಿತ್ರ 9.2

2. ಕೆಲವು ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಅಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಅ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಕೃತಿ	ಅಳತೆಗಳು	ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ	ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
	ಚೌಕ (ವರ್ಗ) ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 15 ಸೆ.ಮೀ	$A = \text{ಉದ್ದ} \times \text{ಉದ್ದ}$	.....
	ಆಯತ ಉದ್ದ = 20 ಸೆ.ಮೀ ಅಗಲ = .....	$A = l \times b$	280 ಸೆ.ಮೀ <sup>2</sup>
	ತ್ರಿಭುಜ ಪಾದ = 5 ಸೆ.ಮೀ ಎತ್ತರ = .....	$A = \dots\dots\dots$	60 ಸೆ.ಮೀ <sup>2</sup>
	ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎತ್ತರ = 7.6 ಸೆ.ಮೀ ಪಾದ = .....	$A = b \times h$	38 ಸೆ.ಮೀ <sup>2</sup>
	ವಜ್ರಾಕೃತಿ $d_1 = 4$ ಸೆ.ಮೀ $d_2 = 3$ ಸೆ.ಮೀ	.....	.....

## 9.1 ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಕುಮಾರನಿಗೆ ಪ್ರಧಾನ ರಹದಾರಿ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮನೆ ಸ್ಥಳವಿದೆ. ತನ್ನ ಮನೆ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿರುವ ಮನೆ ಸ್ಥಳಗಳೆಲ್ಲಾ ಅಯತಾಕಾರ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿವೆ, ತನ್ನ ಸ್ಥಳ ಕೇವಲ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಹೊಂದಿದೆ. ಅದರಿಂದ ಆ ಸ್ಥಳ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಹೋಲಿಕೆ ಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಿರಾ



ಚಿತ್ರ 9.3

ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಮನೆ ಸ್ಥಳದ ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಇಡೋಣ.  $CE \perp AB$ ಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರಿಂದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತ ಮತ್ತು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

$$\Delta ECB \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \text{ ಮೀ}^2$$

$$ADCE \text{ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = AE \times AD = 20 \times 12 = 240 \text{ ಮೀ}^2$$

$$\begin{aligned} ABCD \text{ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \Delta ECB \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} + ADCE \text{ ಆಯತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\ &= 60 + 240 = 300 \text{ ಮೀ}^2 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ABCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ADCE ಆಯತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ECB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ABCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \text{ADCE ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} + \text{ECB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\
 &= (h \times a) + \frac{1}{2} (h \times c) \\
 &= h(a + \frac{1}{2}c) \\
 &= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) \\
 &= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) = \frac{h}{2}(a+a+c) \\
 &= \frac{1}{2}h(a+b) (\because c+a=b) \\
 &= \frac{1}{2} \text{ ಎತ್ತರ (ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ)}
 \end{aligned}$$

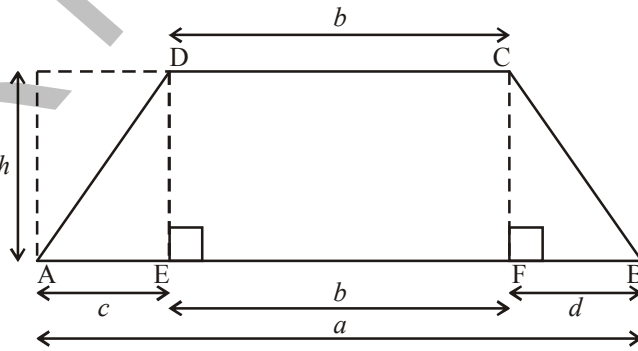
$$\begin{aligned}
 \overline{AD} &= \overline{EC} = h \\
 \overline{AE} &= a, \overline{AB} = b = a + c
 \end{aligned}$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು h, b ಮತ್ತು a ಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\begin{aligned}
 \text{ABDE ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{1}{2}h(a+b) \\
 &= \frac{1}{2} \times 12 \times (30+20) = 300 \text{ ಮೀ}^2
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ	$h = 12$
	$a = 20$
	$b = 30$

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಇಲ್ಲಿ ಆಟದ ಮೈದಾನದ ಚಿತ್ರ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 9.4

**ಪರಿಹಾರ :**

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಆಯತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾರೆವು. ಅದರ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ಆಯತ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.  $DE \perp AB$  ಮತ್ತು  $CF \perp AB$  ಯಾಗಿ ಎಳೆಯುವುದರಿಂದ ಈಗ ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯವನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಆಯತ DEFC ಮತ್ತು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು  $\triangle ADE$  ಮತ್ತು  $\triangle CFB$ .

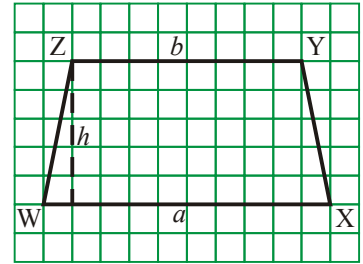
$$\begin{aligned}
 \text{ABCD ತ್ರಾಪಿಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \triangle ADE \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} + \text{ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ DEFC} + \triangle CFB \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \times h \times c\right) + (b \times h) + \left(\frac{1}{2} \times h \times d\right) \\
 &= h \left[\frac{1}{2}c + b + \frac{1}{2}d\right] \\
 &= h \left[\frac{c+2b+d}{2}\right] \\
 &= h \left[\frac{c+b+d+b}{2}\right] \\
 &= h \left[\frac{a+b}{2}\right] \quad (c+b+d=a)
 \end{aligned}$$

ಅದರಿಂದ, ನಾವು ತ್ರಾಪಿಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{aligned}
 &= \text{ಎತ್ತರ} \times \left[\frac{\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ}}{2}\right] \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬದೂರ} \times (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ})
 \end{aligned}$$

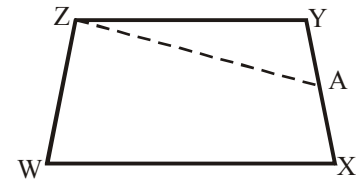
### ಚಟುವಟಿಕೆ

1. ತ್ರಾಪಿಜ WXYZ ನ್ನು ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರ 9.5 (i) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಚಿತ್ರಿಸಿ ಕತ್ತರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ. 9.5 (i)

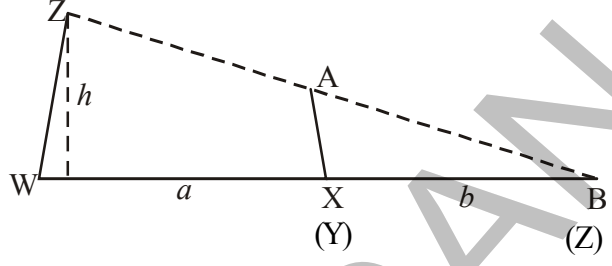
2. XY ನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ (ii)) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಡಚಿ ಅದನ್ನು 'A' ಯಾಗಿ ಹೆಸರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ. 9.5 (ii)

3. AZ ರೇಖಾ ಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

4. ZA ಮೂಲಕ ಕತ್ತಿರಿಸುವುದರಿಂದ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ WXAZ ಎರಡು ತುಂಡುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ. ಚಿತ್ರ (iii) ತೋರಿಸಿದಂತೆ  $\Delta ZYA$  ನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇಡಬೇಕೆಂದರೆ AY ನ್ನು AX ಮೇಲೆ ಬರುವಂತೆ ಇಟ್ಟು ಆಗ 'Y', 'X' ನೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗ ಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 9.5 (iii)

ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ? ಚಿತ್ರ (iii) ಆಧಾರವಾಗಿ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ ಬರೆಯಿರಿ.

5.  $\Delta WZB$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ WXAZ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವೇನಾ ? (ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ?)  
ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ WXAZ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಭುಜ WZB ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

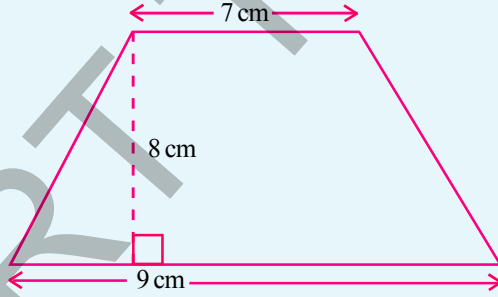
$$= \frac{1}{2} \times \text{ಪಾದ} \times \text{ಎತ್ತರ} = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$$

ಸೂಚನೆ : ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮಾಣ ಚದರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

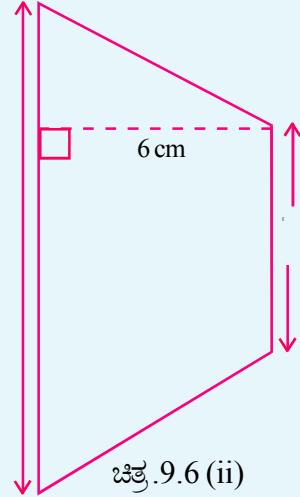


### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

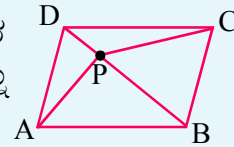


ಚಿತ್ರ.9.6 (i)



ಚಿತ್ರ.9.6 (ii)

2. ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 16 ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>. ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 5 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 4 ಸೆ.ಮೀ. ಎರಡನೇ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
3. ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 100 ಚ.ಸೆ.ಮೀ. P ಎನ್ನುವುದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಅದರ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು. ಅದರ  $\Delta APB + \Delta CPD$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

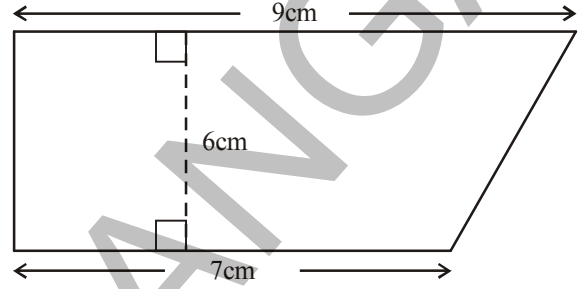




ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 9 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 7 ಸೆ.ಮೀ ಇವೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬದೂರವು 6 ಸೆ.ಮೀ ಆಗಿದೆ. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ  $(9 + 7)$  ಸೆ.ಮೀ = 16 ಸೆ.ಮೀ  
ಇವರೆಡು ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = 6 ಸೆ.ಮೀ



$$\begin{aligned} \text{ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{1}{2} (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ}) \times (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 16 \times 6\right) \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \\ &= 48 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 480 ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 24 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 8 ಸೆ.ಮೀ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ = 24 ಸೆ.ಮೀ  
ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 'x' ಸೆ.ಮೀ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.  
ಹಾಗೆಯೇ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 480 ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>  
ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = 8 ಸೆ.ಮೀ

∴ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2} \times (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ}) \times (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ})$$

$$\therefore 480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$$

$$\Rightarrow 480 = 96 + 4x$$

$$\Rightarrow 480 - 96 = 4x$$

$$\Rightarrow 4x = 384$$

$$\Rightarrow x = \frac{384}{4} = 96 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳು 4:1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ; ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ದೂರ 10 ಸೆ.ಮೀ ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 500 ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>. ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**

$$\text{ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 500 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

$$\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ದೂರ} = 10 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಅನುಪಾತ} = 4 : 1$$

ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು  $4x$  ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು  $x$  ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ

$$\text{ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ}) \times (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ದೂರ})$$

$$\Rightarrow 500 = \frac{1}{2} (x + 4x) \times 10$$

$$\Rightarrow 500 = (x + 4x) 5$$

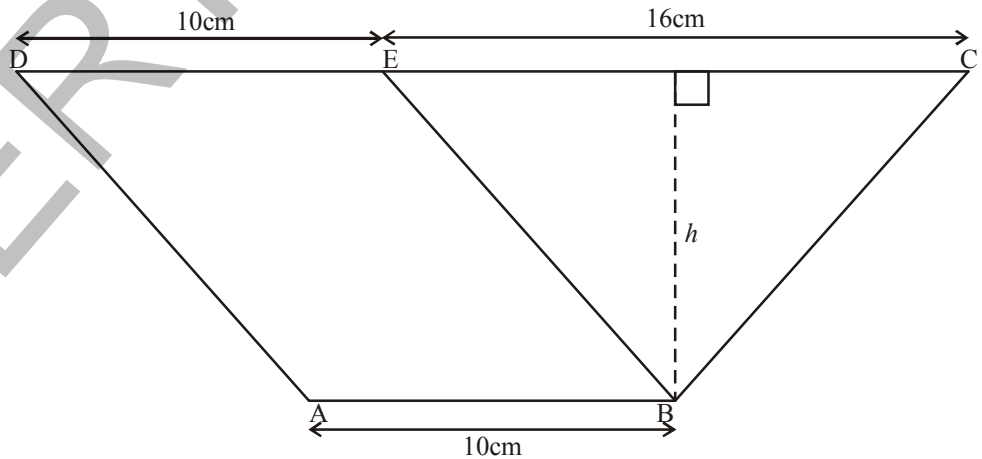
$$\Rightarrow 500 = 25x$$

$$\Rightarrow x = \frac{500}{25} = 20 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$\therefore$  ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಬಾಹು = 20 ಸೆ.ಮೀ

$\therefore$  ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಬಾಹು =  $4x = 4 \times 20 = 80$  ಸೆ.ಮೀ ( $\because$  ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳು 4:1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ )

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABED ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಇದರಲ್ಲಿ  $AB = DE = 10$  ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು  $\Delta BEC$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 72 ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>.  $CE = 16$  ಸೆ.ಮೀ, ಆದರೆ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ .9.7

**ಪರಿಹಾರ :**  $\Delta BEC$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{1}{2} \times \text{ಪಾದ} \times \text{ಎತ್ತರ}$

$$72 = \frac{1}{2} \times 16 \times h$$

$$h = \frac{72 \times 2}{16} = 9 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ತ್ಯಾಪಿಡ್ಯ ABCD ಯಲ್ಲಿ

$$AB = 10 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$DC = DE + EC (\because DE = AB)$$

$$= 10 \text{ ಸೆ.ಮೀ} + 16 \text{ ಸೆ.ಮೀ} = 26 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$\therefore$  ತ್ಯಾಪಿಡ್ಯ ABCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2} \times (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ}) \times (\text{ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ದೂರ})$$

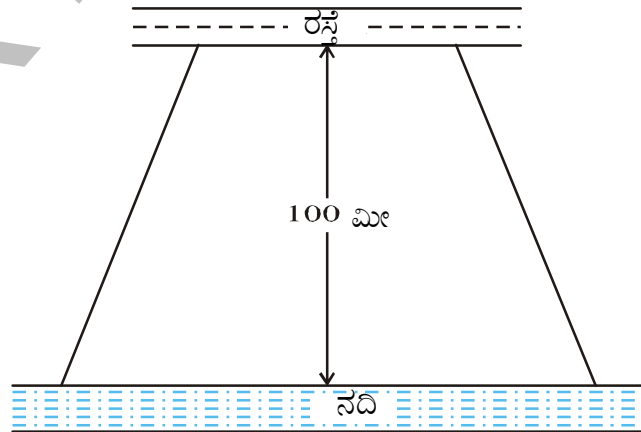
$$= \frac{1}{2} (AB + DC) h$$

$$= \frac{1}{2} (10 + 26) \times 9 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

$$= 18 \times 9 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

$$= 162 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** ಮೋಹನ್ ನದಿಯ ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಹೋಲವನ್ನು ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಸ್ಥಳ ಮಾರಾಟಕ್ಕೆ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ನದಿಯ ಕಡೆ ಇರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ರಸ್ತೆಯ ಕಡೆಗೆ ಇರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದದ ಎರಡರಷ್ಟು ಇದೆ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.8

ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $10,500 \text{ ಮೀ}^2$  ಮತ್ತು ನದಿ, ರಸ್ತೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ 100 ಮೀ. ನದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಇರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ದಾರಿಯ ಕಡೆಗೆ ಇರುವ ಸ್ಥಳದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ =  $x$  ಮೀ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ  
ಆದರೆ, ನದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಇರುವ ಸ್ಥಳದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ =  $2x$  ಮೀ  
ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = 100 ಮೀ

$$\begin{aligned} \text{ಸ್ಥಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{1}{2} \times (a+b) \times h \\ 10,500 &= \frac{1}{2} (x + 2x) \times 100 \\ 10,500 &= 3x \times 50 \\ x &= \frac{10,500}{3 \times 50} = 70 \text{ ಮೀ} \end{aligned}$$

$\therefore$  ನದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಇರುವ ಸ್ಥಳದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ =  $2x = 2 \times 70$   
= 140 ಮೀ

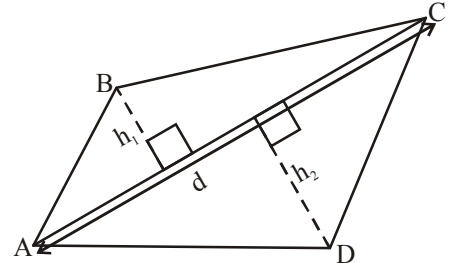
## 9.2 ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು “ತ್ರಿಭುಜೀಕರಣ” ಎನ್ನುವರು.

ಮಹೇಶ್ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯನ್ನು ಕರ್ಣ AC ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬೇಕಾದ ಅಳತೆಗಳು ಎರಡು. ಅವು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಲಂಬ ಎತ್ತರದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಲಂಬ ಎತ್ತರ ಎಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದದಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆ.

ಮಹೇಶ್ B ಮತ್ತು D ಗಳಿಂದ AC ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಲಂಬ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $h_1$  ಮತ್ತು  $h_2$  ಯಾಗಿ ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = (ABC ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) + (ADC ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) ಚಿತ್ರ.9.9

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{1}{2} \times AC \times h_1 \right) + \left( \frac{1}{2} AC \times h_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} AC[h_1 + h_2] \end{aligned}$$

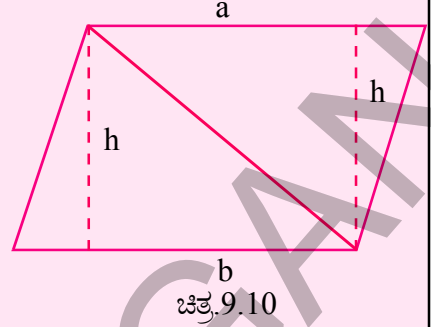
$$\text{ABCD ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$$

ಇಲ್ಲಿ ಕರ್ಣ AC ಯ ಉದ್ದ 'd'



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

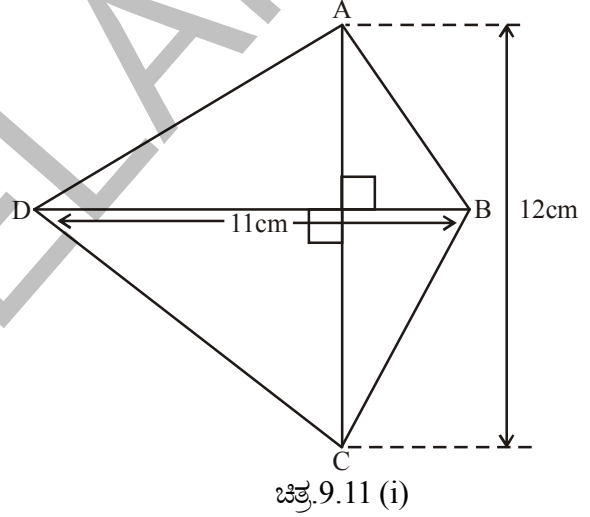
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೂ ಸಹ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಲ್ಲವೇ ! ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬರುವ ಸೂತ್ರ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ?



ಚಿತ್ರ.9.10

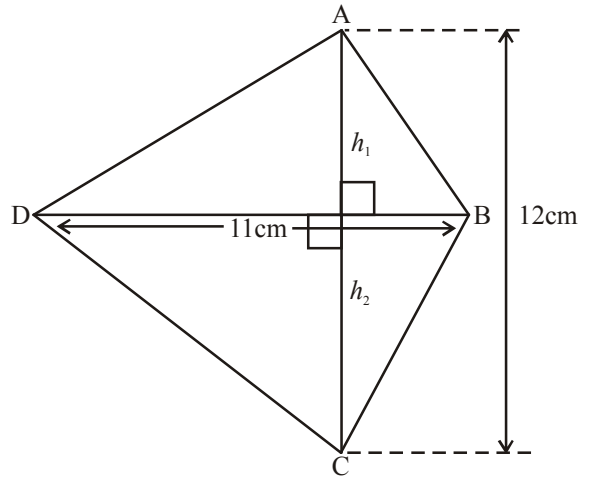
$$\text{ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times \text{ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ} \times \text{ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಎತ್ತರಗಳ ಮೊತ್ತ}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ.9.11 (i)

**ಪರಿಹಾರ :** ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$   
 ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಮೊತ್ತ  
 $AC = (h_1 + h_2)$   
 $h_1 + h_2 = 12$  ಸಂ.ಮೀ



ಚಿತ್ರ 9.11 (ii)

ಕರ್ಣ (BD) ಯ ಉದ್ದ = 11 ಸೆ.ಮೀ

$$\therefore \text{ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 6 \times 11 = 66 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2.$$

### 9.3 ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಅದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ (ಇದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜೀಕರಣ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುವರು) ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ.

ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

$$\therefore OA = OC, \quad OB = OD$$

$$\text{ಮತ್ತು } \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$$

ವಜ್ರಾಕೃತಿ ABCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\Delta ABC$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  $\Delta ADC$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2} \times AC \times OB + \frac{1}{2} \times AC \times OD$$

$$= \frac{1}{2} \times AC (OB + OD)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD \quad (\because OB + OD = BD)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{1}{2} \times d_1 d_2$  ಇಲ್ಲಿ ( $d_1$  ಮತ್ತು  $d_2$  ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಗಳು)

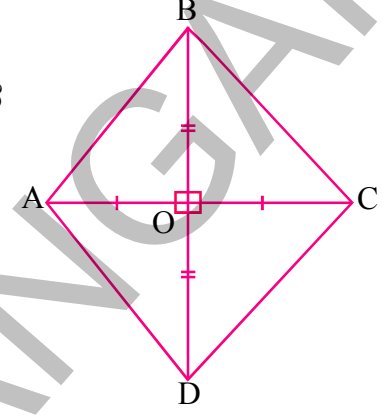
ಇದನ್ನು ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು.

**ಉದಾಹರಣೆ 8:** ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು 10 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 8.2 ಸೆ.ಮೀ ಆಗಿವೆ. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{1}{2} \times d_1 d_2$  ಇಲ್ಲಿ  $d_1$  ಮತ್ತು  $d_2$  ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಗಳು.

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

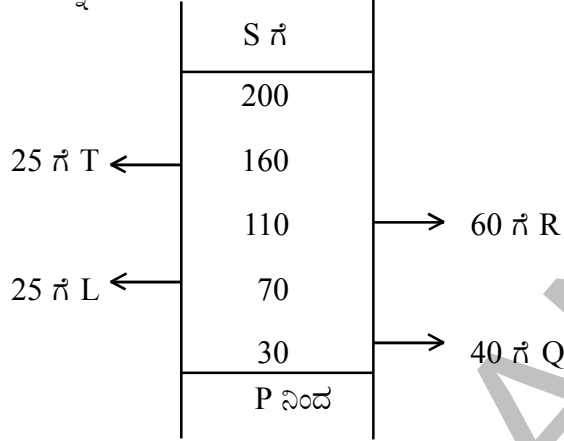
$$= 41 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$



ಚಿತ್ರ 9.12

9.4 ಜಮೀನಿನ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.

ಒಬ್ಬ ಸರ್ವೆಯರ್ ನಕಾಶೆ ಪುಸ್ತಕ ದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜಮೀನಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ನಮೂದಿಸಿ ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಆ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಿದೆ.

1. ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹೊಲದ ಶೃಂಗಗಳು P, Q, R, S, T ಮತ್ತು L.
  2. PS ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.
  3. Q ಮತ್ತು R ಕರ್ಣ PS ಗೆ ಒಂದೇ ಕಡೆ ಇರುವ ಶೃಂಗಗಳು. ಕರ್ಣದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಗೆ T ಮತ್ತು L ಶೃಂಗಗಳಿವೆ Q ನಿಂದ A ಗೆ 40ಮೀ ಲಂಬವು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ RTL ನಿಂದ ಉಳಿದ ಲಂಬಗಳು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.
  4. ಲಂಬವನ್ನು Q ನಿಂದ 40 ಸೆ.ಮೀ ಎಳೆಯಿರಿ.
  5. ಹೊಲದ ನೈಜ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವರೆಗೂ ನಮೂದು ಮಾಡಿರಿ.
  6. ಹೊಲದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ, ಎರಡು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಪಟ್ಟಿದೆ.
- ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$AC = PC - PA$$

$$= 110 - 30 = 80 \text{ ಮೀ}$$

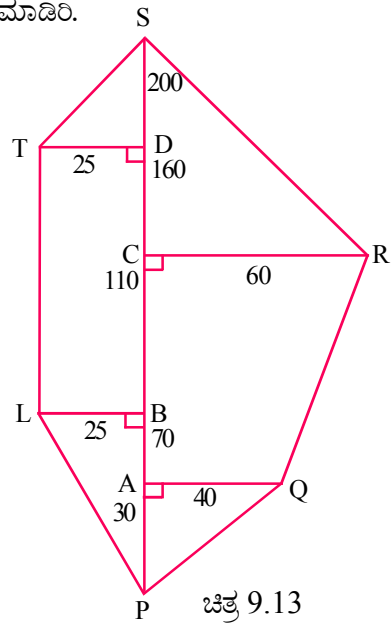
$$CS = PS - PC$$

$$= 200 - 110 = 90 \text{ ಮೀ}$$

$$DS = PS - PD$$

$$= 200 - 160 = 40 \text{ ಮೀ}$$

$$BD = PD - PB$$



ಚಿತ್ರ 9.13

$$= 160 - 70 = 90 \text{ ಮೀ}$$

$$\Delta APQ \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600 \text{ ಚದರ ಮೀ.}$$

$$\text{ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ AQRC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times h(a + b)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC (AQ + CR)$$

$$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$$

$$= \frac{1}{2} \times 80 \times 100$$

$$= 4000 \text{ ಚದರ ಮೀ.}$$

$$\Delta CRS \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times CR \times CS = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700 \text{ ಚದರ ಮೀ.}$$

$$\text{ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ PLTS ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times h(a + b)$$

$$= \frac{1}{2} \times LB (TL + SP)$$

$$= \frac{1}{2} \times 25(90 + 200) \quad (\because TL = BD = 90)$$

$$= \frac{1}{2} \times 25 \times 290$$

$$= 3625 \text{ ಚದರ ಮೀ.}$$

$$\text{ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 600 + 4000 + 2700 + 3625$$

$$= 10,925 \text{ ಚದರ ಮೀ.}$$





**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

ಒಬ್ಬ ಸರ್ವೆಯರ್ ನಕಾಶೆ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಗಳನ್ನು ನಮೂದು ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ಆ ಜಮೀನುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)	D ಗೆ	(ii)	To C
	140		160
E ಗೆ 50 ←	80	D ಗೆ 30 ←	130
	50 → C ಗೆ 50		90 → B ಗೆ 60
	30 → B ಗೆ 30	E ಗೆ 40 ←	60
	A ನಿಂದ		A ನಿಂದ

**ಆಲೋಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸಿ :**

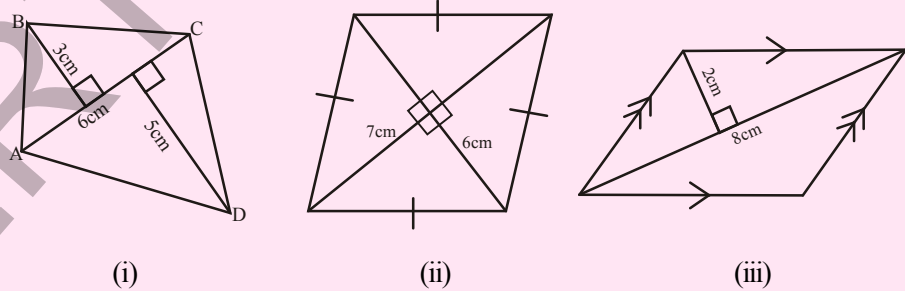


ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಆ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವ ಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿಯೇ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವ ಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸ ಬಹುದೇ?



**ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

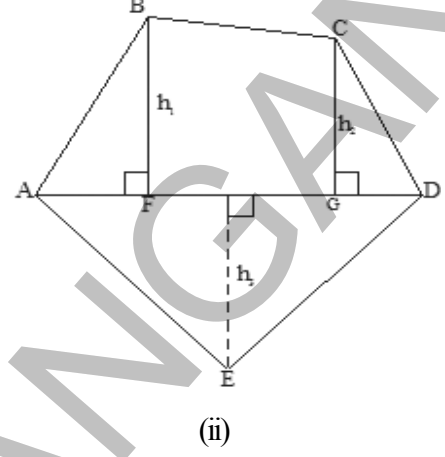
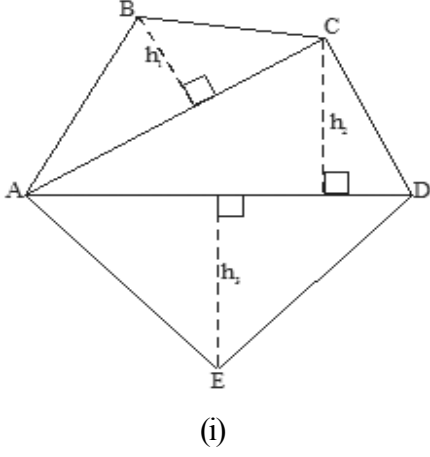


ಚಿತ್ರ 9.13

**9.5 ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಆ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಸರಳ ಸಮತಲ ಚಿತ್ರಗಳಾಗಿ (ತ್ರಿಭುಜ, ಅಯತ, ಮೊದಲಾದವು) ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಆ ಸಮತಲ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ:



ಚಿತ್ರ -9.14

ಚಿತ್ರ(i) : ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು AC ಮತ್ತು AD ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿ ABCDE ಯನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.

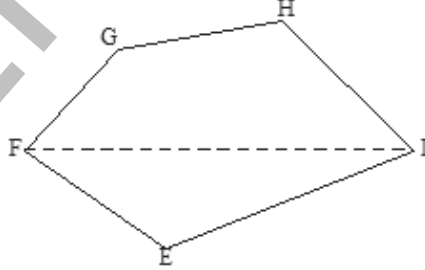
ಆಗ  $ABCDE$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\Delta ABC$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  $\Delta ACD$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  $\Delta AED$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಚಿತ್ರ (ii) : ಒಂದು ಕರ್ಣ AD ಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಲಂಬ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು BF ಮತ್ತು CG ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರಿಂದ ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ABCDE ಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಆಗ  $ABCDE$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ  $\Delta AFB$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ BFGC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ  $\Delta CGD$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  $\Delta AED$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ. ಇದಕ್ಕಿರುವ ಕಾರಣಗಳು ಏನು? (ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ BFGC ಯ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ)

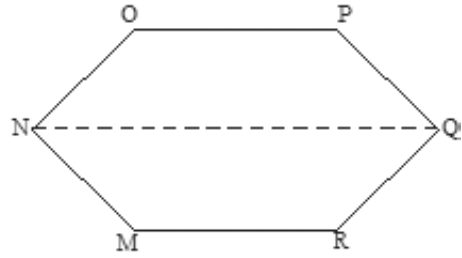


### ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

- (i) ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ. (ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳು) ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ EFGHI ನ ಕರ್ಣ FI

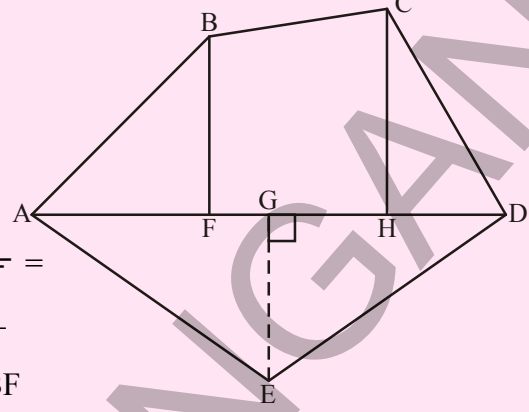


ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ MNPQR ನಲ್ಲಿ NQ ಕರ್ಣ

ಚಿತ್ರ -9.15

(ii) ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ABCDE ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 9.16ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

AD= 8ಸೆ.ಮೀ, AH = 6  
ಸೆ.ಮೀ, AF= 3ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು  
ಲಂಬ ಎತ್ತರಗಳು BF=  
2ಸೆ.ಮೀ, CH = 3ಸೆ.ಮೀ  
ಮತ್ತು EG=2.5ಸೆ.ಮೀ,



ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ABCDE ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  
 $\Delta AFB$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + \_\_\_\_\_

$$\Delta AFB \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times AF \times BF$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ FBCH ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $FH \times \frac{(BF + CH)}{2}$

$$= 3 \times \frac{(2+3)}{2} [\because FH = AH - AF]$$

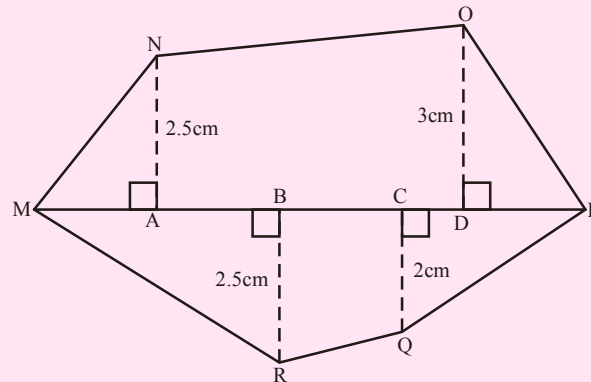
$$\Delta CHD \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times HD \times CH = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta ADE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times AD \times GE = \underline{\hspace{2cm}}$$

ಆಗ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ABCDE ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = .....

(iii) ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ MNOPQR (ಚಿತ್ರ-9.17) ನಲ್ಲಿ MP = 9 ಸೆ.ಮೀ, MD = 7 ಸೆ.ಮೀ, MC = 6 ಸೆ.ಮೀ, MB = 4 ಸೆ.ಮೀ, MA = 2 ಸೆ.ಮೀ ಆದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕರ್ಣ MP ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು NA, OC, QD ಮತ್ತು RB



ಚಿತ್ರ - 9.17

**ಉದಾಹರಣೆ 9:** ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

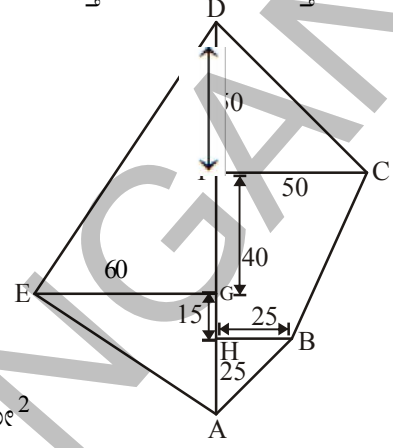
**ಪರಿಹಾರ :**  $ABCDE$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\Delta ABH$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ  $BCFH$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  $\Delta CDF$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  
+  $\Delta AED$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈಗ  $\Delta ABH$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2} \times AH \times HB$$

$$= \frac{1}{2} \times 25 \times 25$$

$$= \frac{625}{2} \text{ ಮೀ}^2 = 312.5 \text{ ಮೀ}^2$$



ಚಿತ್ರ 9.18

$$\text{ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ } BCFH \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times (HB + FC) \times HF$$

$$= \frac{1}{2} (25 + 50) \times 55 \text{ ಮೀ}^2$$

$$= \frac{75 \times 55}{2} \text{ ಮೀ}^2 = 2062.5 \text{ ಮೀ}^2$$

$$\Delta CDF \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times FC \times DF$$

$$= \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \text{ ಮೀ}^2 = 1250 \text{ ಮೀ}^2$$

$$\Delta AED \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times AD \times EG$$

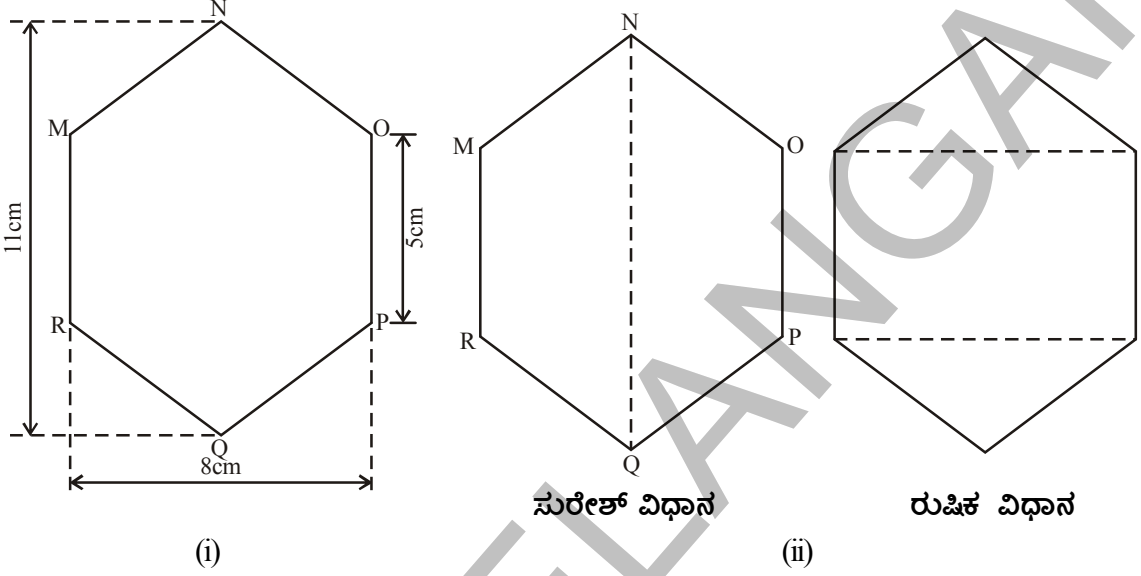
$$= \frac{1}{2} \times 130 \times 60$$

$$= 3900 \text{ ಮೀ}^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ  $ABCDE$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $312.5 \text{ ಮೀ}^2 + 2062.5 \text{ ಮೀ}^2 + 1250 \text{ ಮೀ}^2 + 3900 \text{ ಮೀ}^2$

$$= 7525 \text{ ಮೀ}^2$$

**ಉದಾಹರಣೆ 10:** ಷಡ್ಭುಜ MNOPQR ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 5 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು NQ ಸಮಮಿತಿ ಆಕೃ. ಸುರೇಶ ಮತ್ತು ರುಷಿಕ ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ವಿಭಿನ್ನವಿಧಗಳಾಗಿ ( ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ) ವಿಭಜಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿರುವ ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ - 9.19

**ಪರಿಹಾರ :**

ಸುರೇಶ್ ಆನುಸರಿಸಿದ ವಿಧಾನ

ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರ ಒಂದು ನಿಯಮಿತ ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿ ಆದ್ದರಿಂದ NQ ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಪೇಪರ್ ಪೋಲ್ಡಿಂಗ್ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸ ಬಹುದು.

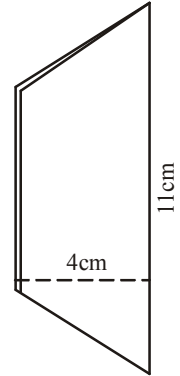
5 ಸೆ.ಮೀ

MNQR ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= 4 \times \frac{11+5}{2} = 2 \times 16 = 32 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ MNOPQR ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $2 \times 32 = 64 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$

ಚಿತ್ರ-9.20



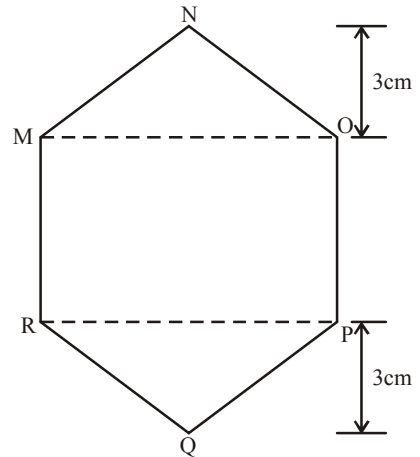
**ರುಷಿಕ ಆನುಸರಿಸಿದ ವಿಧಾನ**

$\Delta MNO$  ಮತ್ತು  $\Delta RPQ$  ಗಳು 3 ಸೆ.ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ಅದನ್ನು  $\Delta MNO$  ಮತ್ತು  $\Delta RPQ$  ಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಇಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಗಮನಿಸ ಬಹುದು.

$$\begin{aligned} \text{MNO ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \\ &= \Delta RPQ \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \end{aligned}$$

$$\text{MOPR ಆಯತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 8 \times 5 = 40 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$$

$$\text{MNOPQR ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 40 + 12 + 12 = 64 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2.$$

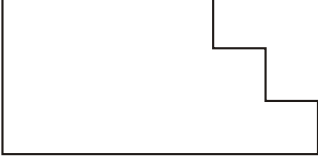


ಚಿತ್ರ-9.21

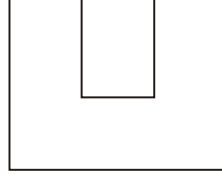


## ಅಭ್ಯಾಸ - 9.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸೂಚನೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅಕಾರಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿರಿ



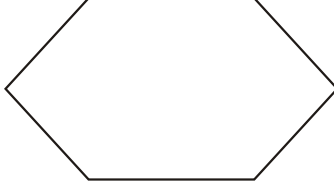
(i) 3 ಆಯತಗಳಾಗಿ



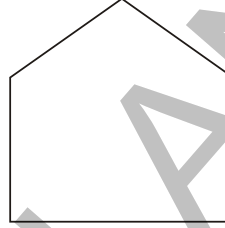
(ii) 3 ಆಯತಗಳಾಗಿ



(iii) 2 ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳಾಗಿ

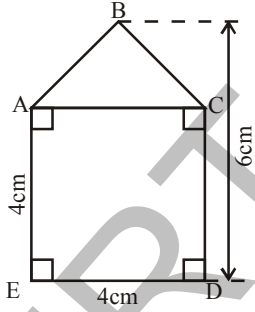


(iv) 2 ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಆಯತ

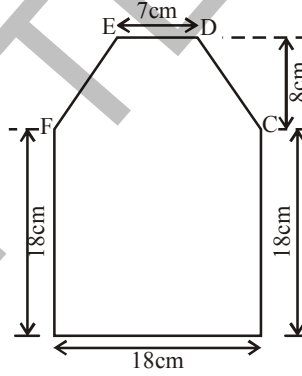


(v) 3 ತ್ರಿಭುಜಗಳು

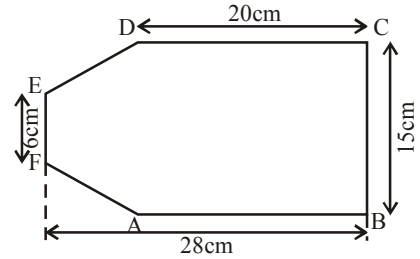
2. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ಒಳಗೊಂಡ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



(i)



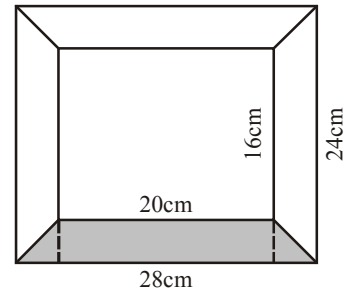
(ii)



(iii)

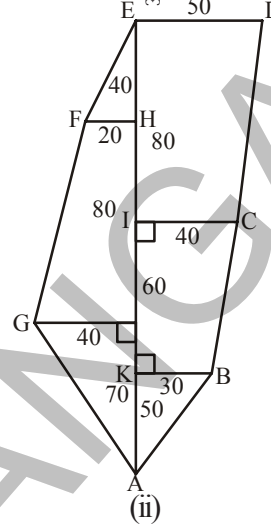
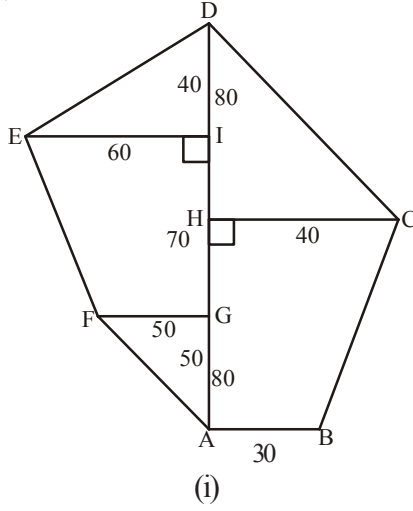
3. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣ AC = 10 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು AC ಯ ಮೇಲೆ ಶೃಂಗ B ಮತ್ತು D ನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು 5 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 6 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಪೋಟೋ ಫ್ರೇಮಿನ ಹೊರ ಅಂಚುಗಳ ಆಳತೆಗಳು 28 ಸೆ.ಮೀ × 24 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು ಒಳ ಅಂಚುಗಳ ಆಳತೆಗಳು 20 ಸೆ.ಮೀ × 16 ಸೆ.ಮೀ. ಫ್ರೇಮಿನ ಅಗಲ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಪೇಪರ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶದ

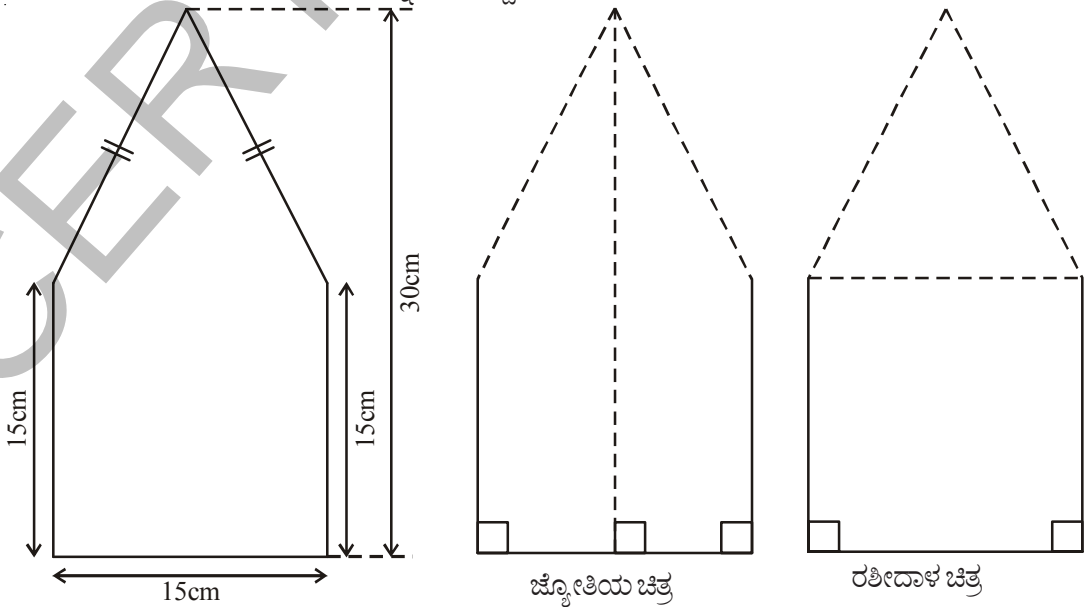


ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ಜಮೀನುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳು ಮೀಟರ್ ಗಳಲ್ಲಿವೆ.



6. ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳು 5:3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 16 ಸೆ.ಮೀ, ಆ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 960 ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>, ಆದರೆ ಅದರ ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಭವನದ ನೆಲಕ್ಕೆ ಸುಮಾರು 3000 ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಆಕಾರದ ಟೈಲ್ ಗಳನ್ನು ಹಾಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು 45 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 30 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದವಾಗಿವೆ ಒಂದು ಟೈಲ್ ಹಾಸುವುದಕ್ಕೆ 20 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಖರ್ಚಾದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಟೈಲ್ ಹಾಸುವುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಂಚ ಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಜ್ಯೋತಿ ಮತ್ತು ರಷೀದಾ ಅದನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿ ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

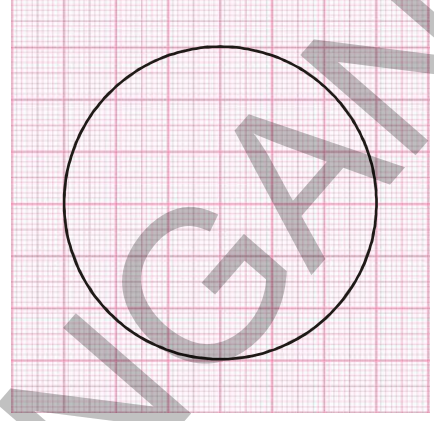


### 9.6 ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

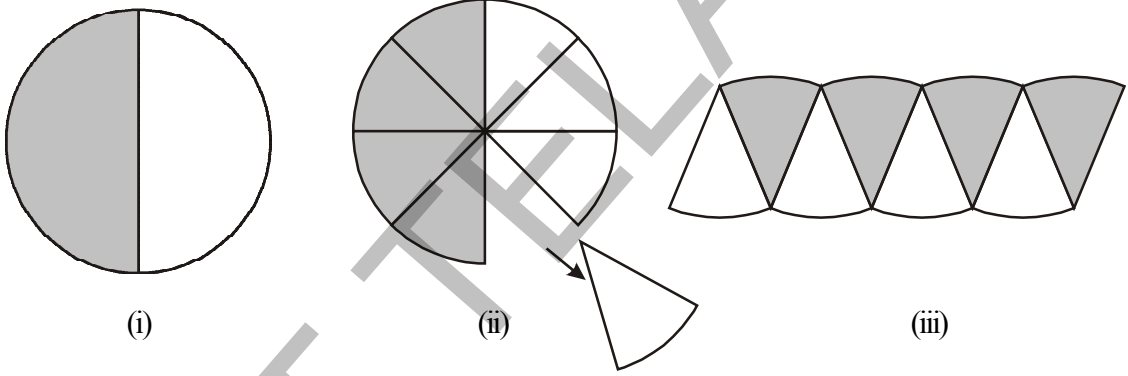
ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿನಾವು ವೃತ್ತಾಕಾರಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ, ಮೊದಲು ನಾವು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

4 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತ ಆಕ್ರಮಿಸಿದ ಚೌಕಗಳನ್ನು (ಲೆಕ್ಕಿಸಿ) ಎಣಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ವೃತ್ತದ ಅಂಚುಗಳು ಸರಳರೇಖೆ ಅಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಖಚಿತ ವಾಗಿರುವುದಲ್ಲದೆ ಸರಿಸುಮಾರುಯಾಗಿರುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿ ಇದೆ.



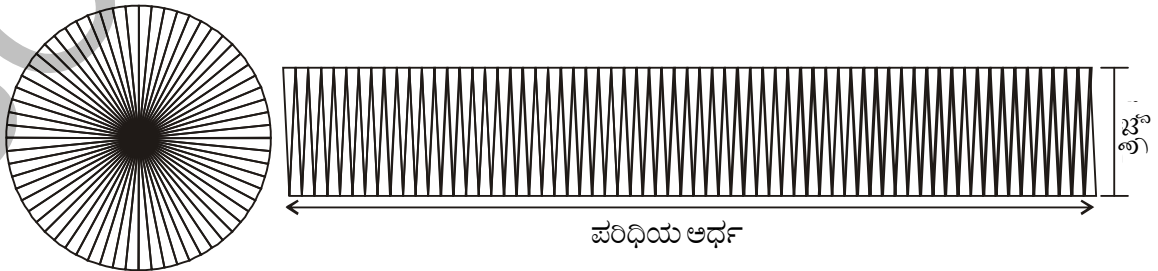
ಚಿತ್ರ .9.22



ಚಿತ್ರ .9.23

ಚಿತ್ರ-9.23(i) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿರಿ. ಈಗ ವೃತ್ತವನ್ನು ಮಡಚುವುದರ ಮೂಲಕ ಎಂಟು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ ಚಿತ್ರ 9.23(ii) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ.

ಕತ್ತರಿಸಿದ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 9.23 (iii), ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಅದರ ಆಕಾರ ಕಚ್ಚಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಂತಿದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಆಕಾರವು ಸರಿಯಾದ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಹೊಲುವಂತಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು ವೃತ್ತವನ್ನು 64 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಚಿತ್ರ(9.24) ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ - 9.24



ಆಯತದ ಅಗಲವೆಷ್ಟು? ಆಯತದ ಅಗಲ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ 'r' ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ!

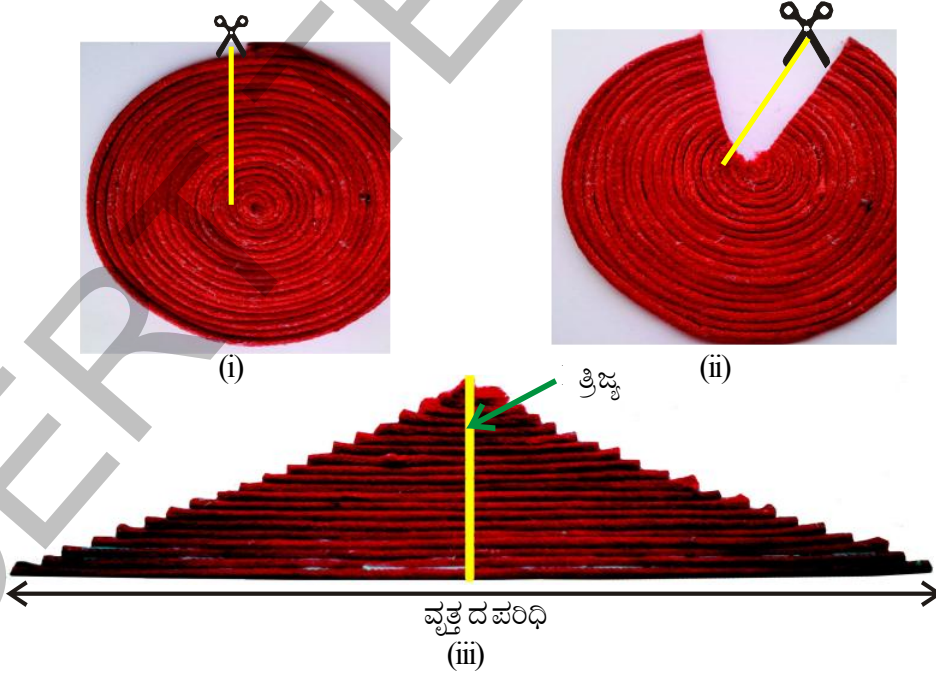
ವೃತ್ತವನ್ನು 64 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಪ್ರತಿ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ 32 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಆಯತದ ಉದ್ದ 32 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮ. ಇದು ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ (ಚಿತ್ರ. 9.24).

$$\begin{aligned}
 \text{ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \text{ಏರ್ಪಟ್ಟ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\
 &= l \times b \\
 &= (\text{ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ}) \times \text{ತ್ರಿಜ್ಯ} \\
 &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2
 \end{aligned}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \pi r^2$$

**ದಾರದಿಂದ ಚಟುವಟಿಕೆ :**

ಟಾಲ್ ಮುಡ್‌ನ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ (A book of Jews) ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $A = \pi r^2$  ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಒಳ್ಳೆಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ದಾರದ ಕೊನೆಯನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇಟ್ಟು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಏಕಕೇಂದ್ರ ವೃತ್ತಗಳಾಗಿ ಸುತ್ತಿ, ನೇರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ (ಲಂಬವಾಗಿ) ಕತ್ತರಿಸಿ. ಆ ದಾರದ ಕೊನೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿ ಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿ ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.



ಸಮದ್ವಿ ಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ, ಎತ್ತರ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

$$\text{ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times \text{ಪಾದ} \times \text{ಎತ್ತರ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

$$\therefore \text{ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \pi r^2 \text{ (ಇಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಆಗಿದೆ)}$$



### ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :

ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಚದರಮಾನ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತಾ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೂಡ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ 11:** ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ 27.5 ಸೆ.ಮೀ. ಬಾಹು ಇರುವ ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿ ತಯಾರಿಸಲಾಗಿದೆ.. ಇದೇ ತಂತಿಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಮಾಡಿ ವೃತ್ತವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ತಯಾರಿಸಿದ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :**

ತಂತಿಯ ಉದ್ದ = ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ

$$= (27.5 \times 4) \text{ ಸೆ.ಮೀ} = 110 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ತಂತಿಯನ್ನು ವೃತ್ತಾಕಾರಕ್ಕೆ ಬಗ್ಗಿಸಿದಾಗ, ಅದು ವೃತ್ತದ 110 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಪರಿಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಆಲ್ಲವೇ!

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಆಗಿರಲಿ,

$$\text{ಆಗ ಪರಿಧಿ} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times r \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$= \frac{44}{7} r \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$\therefore 110 = \frac{44}{7} r$$

$$\Rightarrow r = \frac{110 \times 7}{44} \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

$$= 17.5 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 12:** ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ 22 ಸೆ.ಮೀ. ಅದರ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಮತ್ತು ಅದರ ಅರ್ಧವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:**

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಇರಲಿ,

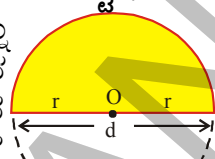
$$\text{ಆಗ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ} = 2\pi r$$

$$\therefore 2\pi r = 22$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$\begin{aligned}
 r &= 22 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2} = 3.5 \text{ ಸೆ.ಮೀ} \\
 \therefore \text{ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ} &= 3.5 \text{ ಸೆ.ಮೀ} \\
 \text{ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ } \pi r^2 &= \left( \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \right) \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \\
 &= 38.5 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \\
 \text{ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\
 &= \frac{1}{2} \times 38.5 = 19.25 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2
 \end{aligned}$$

**ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ?**  
 ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಅದರ ವ್ಯಾಸದ ಮೂಲಕ ಮಡಚಿದ ಹಾಗೆ ಊಹಿಸಿದ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದಾ? ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ  $= \frac{1}{2} \pi r^2$  ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

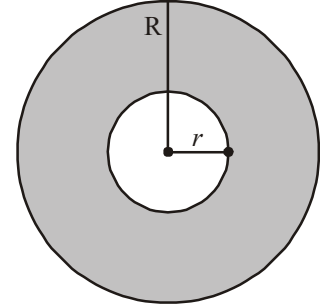


**9.7 ವೃತ್ತಾಕಾರ ದಾರಿಯ ಅಥವಾ ವಲಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

ಒಂದು ಪಾರ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ದಾರಿಯನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಾಕಾರ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯ, ಅಂತರ ವೃತ್ತಗಳಿರುವ ಏಕ ಕೇಂದ್ರ ವೃತ್ತಗಳು. ಅದರ ಅ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ದಾರಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ವಲಯ ಕಾರದ ದಾರಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬಾಹ್ಯ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಬಾಹ್ಯ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'R' ಮತ್ತು ಅಂತರ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಅದರೆ

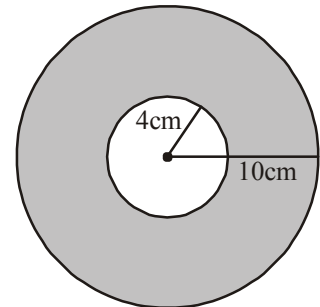
$$\begin{aligned}
 \text{ವಲಯಾಕಾರ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \text{ಬಾಹ್ಯ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} - \text{ಅಂತರ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\
 &= \pi R^2 - \pi r^2 \\
 &= \pi (R^2 - r^2)
 \end{aligned}$$



ಅದರಿಂದ ವಲಯಕಾರದ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi (R^2 - r^2)$  or  $\pi (R + r)(R - r)$   
 ಇದರಲ್ಲಿ R ಬಾಹ್ಯವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ, r ಅಂತರ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ

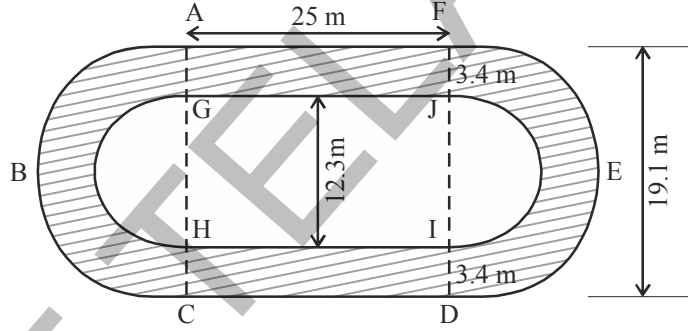
**ಉದಾಹರಣೆ 12:** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದು ಏಕ ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಬಾಹ್ಯ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆ.ಮೀ. ಅಂತರ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆ.ಮೀ.

- ಆದರೆ (i) ದೊಡ್ಡವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?  
 (ii) ಸಣ್ಣವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?  
 (iii) ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು? (  $\pi = 3.14$  ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



- ಪರಿಹಾರ :
- (i) ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 10 ಸೆ.ಮೀ  
 ಆಗ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi r^2$   
 $= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$  ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>
- (ii) ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 4 ಸೆ.ಮೀ  
 ಆಗ ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi r^2$   
 $= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$  ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>
- (iii) ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  
 $= (314 - 50.24)$  ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>  
 $= 263.76$  ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>.

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

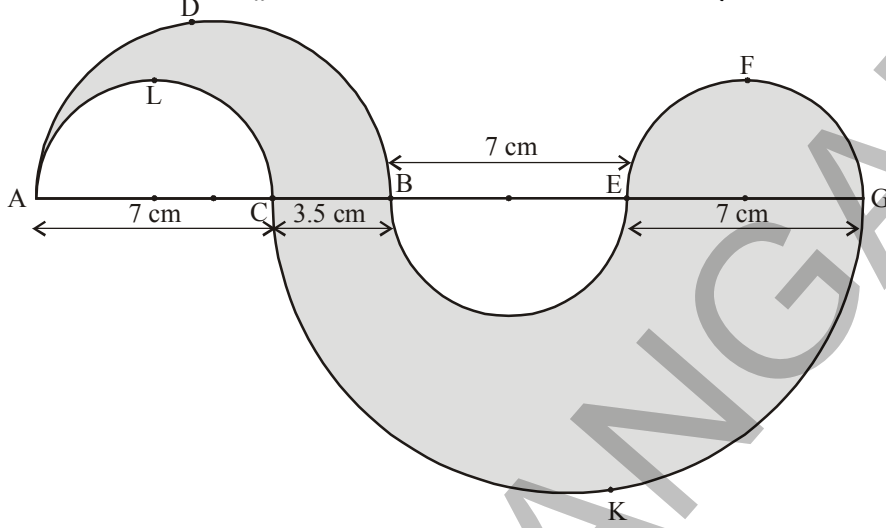


- ಪರಿಹಾರ :
- ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅಯತ AGJF ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅಯತ HC DI ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  
 + ABCHG ಅರ್ಧ ವಲಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + DEFJI ಅರ್ಧ ವಲಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  
 ಅಯತ AGJF ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $25 \times 3.4 = 85$  ಮೀ<sup>2</sup>.  
 ಅಯತ HC DI ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $25 \times 3.4 = 85$  ಮೀ<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned}
 \text{ABCHG ಅರ್ಧ ವಲಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \pi [(R^2 - r^2)] = \frac{22}{7} \times \frac{1}{2} [(9.55)^2 - (6.15)^2] \\
 \text{DEFJI ಅರ್ಧ ವಲಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \pi [(R^2 - r^2)] = \frac{22}{7} \times \frac{1}{2} [(9.55)^2 - (6.15)^2] \\
 &= (25 \times 3.4) + (25 \times 3.4) + \frac{1}{2} \pi [(9.55)^2 - (6.15)^2] + \frac{1}{2} \pi [(9.55)^2 - (6.15)^2] \\
 &= [85 + 85 + \frac{22}{7} \times 15.7 \times 3.4] \text{ ಮೀ}^2 \\
 &= (170 + 167.77) \text{ ಮೀ}^2 \\
 &= 337.77 \text{ ಮೀ}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{19.1}{2} = 9.55 \\
 r &= \frac{12.3}{2} = 6.15
 \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 15: ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

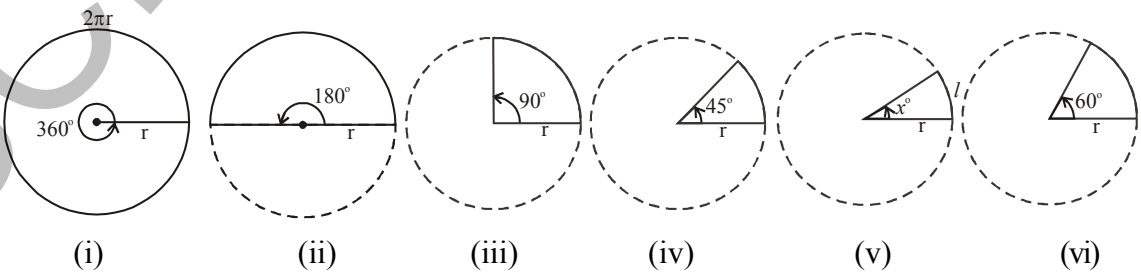


ಪರಿಹಾರ : ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ADBCLA ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + EFGE ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + BEGKCB ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times \pi \left[ \left( \frac{10.5}{2} \right)^2 - \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \pi \left( \frac{7}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left[ \left( \frac{17.5}{2} \right)^2 - \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right] \text{ ಸಂ.ಮೀ}^2 \\
 &= \left( \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{4} \times \frac{7}{4} \right) + \left( \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{49}{4} \right) + \left( \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{49}{4} \right) \text{ ಸಂ.ಮೀ}^2 \\
 &= \left( \frac{385}{16} + \frac{77}{4} + \frac{1617}{16} \right) \text{ ಸಂ.ಮೀ}^2 \\
 &= \left( \frac{2310}{16} \right) \text{ ಸಂ.ಮೀ}^2 \\
 &= 144.375 \text{ ಸಂ.ಮೀ}^2
 \end{aligned}$$

### 9.8 ಕಂಪದ ಉದ್ದ (Length of the Arc)

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕೋಷ್ಠಕವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

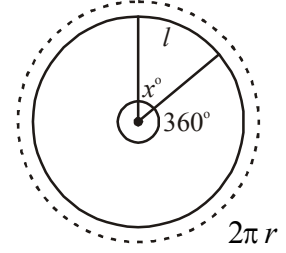


ಚಿತ್ರ	ಕೋನ	ಕಂಸದ ಉದ್ದ	ಸೆಕ್ಟರ್ ಕೋನ ಮತ್ತು ಕಂಸದ ಉದ್ದ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ
(i)	$360^0$	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	$180^0$	$\pi r$	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	$90^0$	$\frac{\pi r}{2}$	_____
(iv)	$45^0$	$\frac{\pi r}{4}$	_____
(v)	$x^0$	$l$	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$
(vi)	$60^0$	$\frac{\pi r}{3}$	_____

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ, ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದ ( $l$ )  $\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r$  ಇಲ್ಲಿ 'r' ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 'x' ಎನ್ನುವುದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ 'l' ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವಾದರೆ

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

ಆಗ  $l = \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r$



### 9.9 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಆಥವಾ ಸೆಕ್ಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಕಂಸ ಮತ್ತು ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಭಾಗವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ (Sector) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

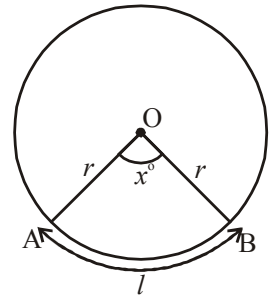
'r' ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi r^2$

ಸೆಕ್ಟರ್‌ನ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರ ದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ =  $x^0$

ಸೆಕ್ಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಸೆಕ್ಟರ್ ಕೋನ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.

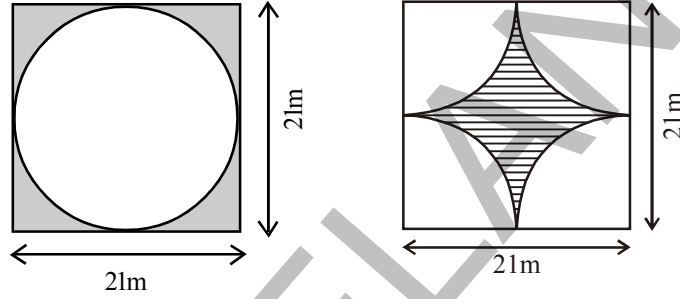
$\therefore$  ಸೆಕ್ಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ : ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $x^0 : 360^0$

ಸೆಕ್ಟರ್ OAB ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{x^0}{360^0} \times$  ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ



$$\begin{aligned}
\text{ಆದ್ದರಿಂದ ಸೆಕ್ಟರು OAB ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \left[ \pi r^2 = \pi r \times \frac{2r}{2} \right] \\
&= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r \times \frac{r}{2} \\
&= l \times \frac{r}{2} \\
A &= \frac{lr}{2} \quad (l \text{ ಎನ್ನುವುದು ಕಂಸದ ಉದ್ದ})
\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 13:** ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ



**ಪರಿಹಾರ :**

(i) ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned}
&= \{ 21 \text{ ಮೀ ಬಾಹು ವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \} - \{ 21 \text{ ಮೀ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \} \\
&= \text{ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ } 21 \text{ ಮೀ} \\
\text{ಆಗ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ} &= \frac{21}{2} = 10.5 \text{ ಮೀ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= (21 \times 21) - \left( \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \right) \text{ ಮೀ}^2 \\
&= 441 - 346.5 \\
&= 94.5 \text{ ಮೀ}^2
\end{aligned}$$

(ii) ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = { 21 ಮೀ ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ } - { 4 × ಸೆಕ್ಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ }

$$= (21 \times 21) - \left( 4 \times \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \right) \text{ ಮೀ}^2$$

(ವ್ಯಾಸ 21 ಮೀ ಆದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯ  $\frac{21}{2}$  ಮೀ)

$$= (21 \times 21) - \left( 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \right)$$

$$= (441 - 346.5) \text{ ಮೀ}^2$$

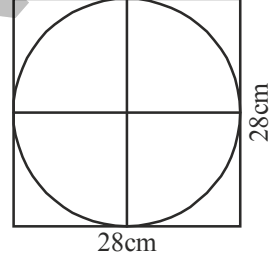
$$= 94.5 \text{ ಮೀ}^2$$



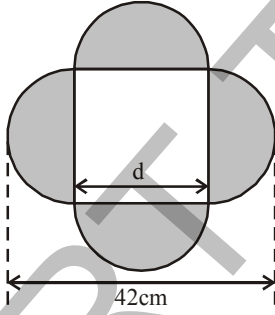
### ಅಭ್ಯಾಸ - 9.2

1. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದದ ಉದ್ದ ಅಗಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 36 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 25 ಸೆ.ಮೀ. ನಿಂದ 3.5 ಸೆ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಹೊಂದಿದ 56 ವೃತ್ತಾಕಾರ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. 28 ಸೆ.ಮೀ ಬಾಹು ಇರುವ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೀನವಾದ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸೂಚನೆ: ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ]



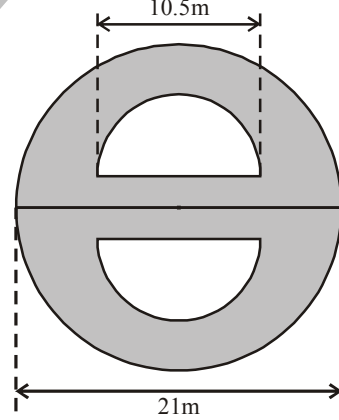
3. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



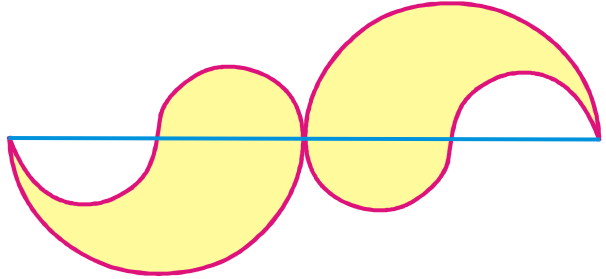
$$[\text{ಸೂಚನೆ: } d + \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 42]$$

$$d = 21$$

$\therefore$  ಚೌಕದ ಬಾಹು = 21 ಸೆ.ಮೀ

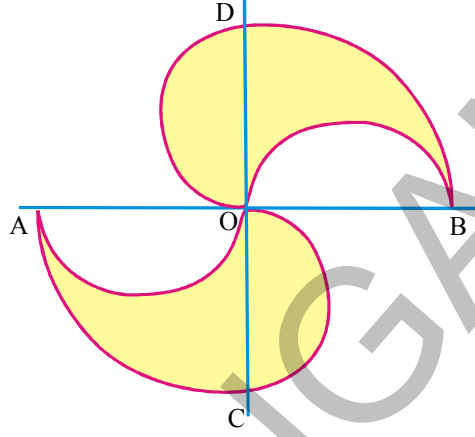


4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ 4 ಸಣ್ಣ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ದೊಡ್ಡ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯ 42 ಸೆ.ಮೀ) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಜೊತೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

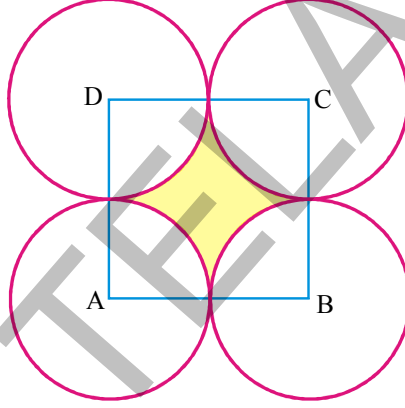




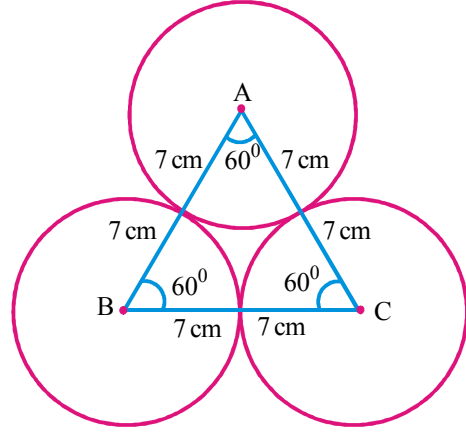
5. ನಾಲ್ಕು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಗಳು, ಎರಡು ಕಾಲುಭಾಗ ವೃತ್ತಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಜೊತೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.  $OA = OB = OC = OD = 14$  ಸೆ.ಮೀ. ಅದರ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?



6. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ A, B, C ಮತ್ತು D ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿ ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. ABCD ಚೌಕದ ಬಾಹು 7 ಸೆ.ಮೀ. ಅದರ ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



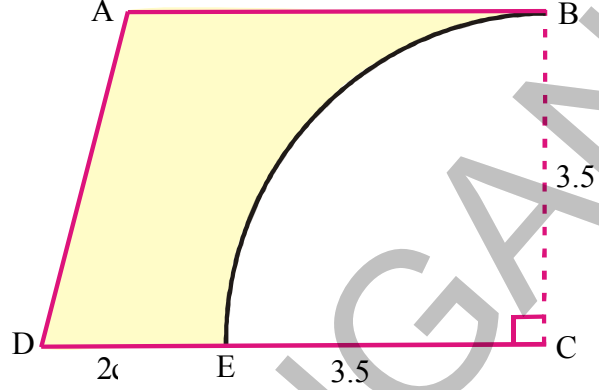
7. ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $49\sqrt{3}$  ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup>. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. ಅದರ ಈ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದ ತ್ರಿಭುಜ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



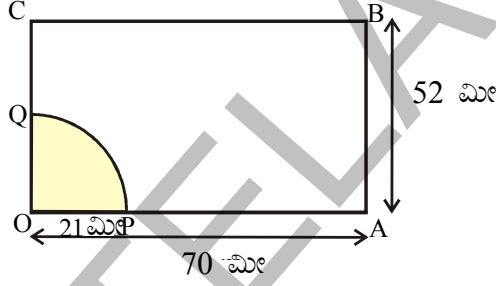
- 8.(i) 'a' ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. ಅದರ ಆ ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (ii) ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತ ಮತ್ತೆರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಇದ್ದರೆ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಆ ಚೌಕದ ಬಾಹು 24 ಸೆ.ಮೀ ಅದರ ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಷೇಡ್ ಮಾಡಿದರೆ, ಷೇಡ್ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

9. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ AB||CD ಮತ್ತು  $\angle BCD = 90^\circ$ , ಮತ್ತು ಕಾಲು ಭಾಗ ವೃತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. AB = BC = 3.5 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು DE = 2 ಸೆ.ಮೀ ಆದರೆ ಉಳಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ}\right)$$



10. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕುದುರೆ ಕಟ್ಟಿಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಆಯತದ ಅಳತೆಗಳು 70 ಮೀ ಮತ್ತು 52 ಮೀ ಇವೆ. ಆಯತಾಕಾರದ ಜಮೀನಿನ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ 21 ಮೀ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಹಗ್ಗಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಕುದುರೆ ಓಡಾಡುವ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



#### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡ ಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{1}{2}$  (ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತ)  $\times$  (ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ದೂರ)
- ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{1}{2} \times$  ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ  $\times$  ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಎತ್ತರಗಳ ಮೊತ್ತ)
- ವಜ್ರಾಕೃತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ.
- ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi r^2$  ಇದರಲ್ಲಿ 'r' ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ.
- ವಲಯಾಕಾರ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi(R^2 - r^2)$  ಅಥವಾ  $\pi(R + r)(R - r)$   
ಇದರಲ್ಲಿ R - ಬಾಹ್ಯವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ  
r - ಅಂತರ್ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ
- ಸೆಕ್ಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (A) =  $\frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$  ಇದರಲ್ಲಿ r - ತ್ರಿಜ್ಯ,  $x^\circ$  - ಸೆಕ್ಟರ್ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ ಅಥವಾ  $A = \frac{lr}{2}$  l - ಸೆಕ್ಟರ್ ಕಂಸದ ಉದ್ದ  
r - ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ

## ನೀರ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳು (ಮಾರ್ಪು)

### 10.0 ಪರಿಚಯ :

ಗೋಪಿ ಪ್ರತಿ ದಿನ ಅನ್ನಮಾಡಲು 2 ಕಪ್ಪು ಅಕ್ಕಿಗೆ 4 ಕಪ್ಪು ನೀರನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾನೆ. ಈ ದಿನ ಅವನ ಮನೆಗೆ ಅತಿಥಿಗಳು ಬರುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನು ಕಪ್ಪು ಅನ್ನಮಾಡಬೇಕು. 6 ಕಪ್ಪು ಅನ್ನಮಾಡಲು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಕಪ್ಪು ನೀರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು?



ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬಹಳ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿನ ಮಾರ್ಪು, ಮತ್ತೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲೂ ಸಹ ಮಾರ್ಪು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.



(i) ನಿಮ್ಮ ಪಾಠ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ನಮೋದಿಸಲಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಮಧ್ಯಾಹ್ನ ಭೋಜನ (ಬಿಸಿ ಊಟ) ಗೆ ಬೇಕಾದ ಆಹಾರದ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಬದಲಾವಣೆ(ಮಾರ್ಪು)ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು? ಮಧ್ಯಾಹ್ನ ಭೋಜನಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಆಹಾರ ಪ್ರಮಾಣ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲವೇ!



(ii) ಬ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಹೆಚ್ಚು ಠೇವಣಿ ಇಟ್ಟರೆ ಆ ಹಣಕ್ಕೆ ಬರುವ ಬಡ್ಡಿಯ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳ ಬಲ್ಲೀರಿ? ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಬರುವ ಬಡ್ಡಿ ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಹೌದೇ!

(iii) ನೀವು ಕೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆ ಯಾದರೆ ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಎಂತಹ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುತ್ತದೆ? ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

(iv) 40 ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಭಾರ 1.6 ಕೆ.ಗ್ರಾಂ ಅದರೆ 20 ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಭಾರ ಎಷ್ಟು? ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ 20 ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಭಾರ ಕಡಿಮೆಯೇ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆ ಇನ್ನೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಬದಲಾವಣೆ ತರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.



### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ನ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ ಬದಲಾವಣೆ ಕಂಡು ಬರುವ ಐದು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಗೋಪಿಗೆ ಬೇಕಾದ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಹೇಳಲು ನಾವು ಈ ಬದಲಾವಣೆ (ಮಾರ್ಪು)ಗಳಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಓದೋಣ.

### 10.1 ನೇರ ಅಥವಾ ಅನುಲೋಮಾನುಪಾತ (ನೇರ ಮಾಪುರ್)

ವನ ಮಹೋತ್ಸವದ ಅಂಗವಾಗಿ ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ಪರ್ಯಾವರಣ ಪರಿಷ್ಕರಣ ಕಮಿಟಿ ಅಧ್ಯಕ್ಷರು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಸಸಿಗಳನ್ನು ನೆಡಬೇಕೆಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಪಾಠ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ಪರ್ಯಾವರಣ ಕಮಿಟಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ತರಗತಿ	VI	VII	VIII	IX	X
ಪರ್ಯಾವರಣ ಕಮಿಟಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	7	10	12	15

ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಎರಡು ಸಸಿಗಳನ್ನು ನೆಡಬೇಕು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ತರಗತಿ	VI	VII	VIII	IX	X
ಪರ್ಯಾವರಣ ಕಮಿಟಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	7	10	12	15
ಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	14	20	24	30

ಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಿ? ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನೀವು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿದ್ದೀರಿ? ಎರಡೂ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿವೆ ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿವೆ.

$$\frac{\text{ಬೇಕಾದ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{20}{10} = \dots = \frac{2}{1} = 2 \text{ ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ರಾಶಿ.}$$

ಇದನ್ನು ನಾವು ಅನುಪಾತೀಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ಥಿರ ಅನುಪಾತೀಯ ಇರುವುದರಿಂದ ಇಂತಹ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನಾವು ನೇರ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$x$ ,  $y$  ಎನ್ನುವ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಇದ್ದು  $\frac{x}{y}$  ಬೆಲೆ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆದರೆ ( $k$  ಇರಲಿ), ಅ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು  $x$  ಮತ್ತು  $y$  ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು  $x \propto y$  ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು  $x$  ಎನ್ನುವ ರಾಶಿ  $y$  ಎನ್ನುವ ರಾಶಿಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore \frac{x}{y} = k \Rightarrow x = ky \text{ ಇದರಲ್ಲಿ } k \text{ ಎನ್ನುವುದು ಅನುಪಾತೀಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕ.}$$

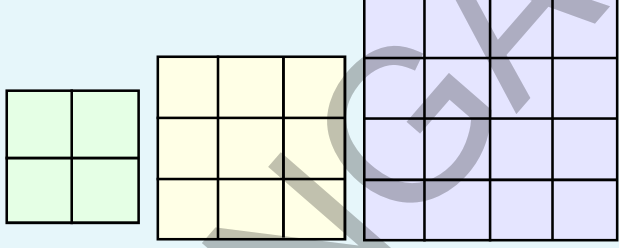
$$x \text{ ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ } x_1, x_2 \text{ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ } y \text{ ನ ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ } y_1, y_2 \text{ ಆದರೆ ಆಗ } \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ**

1. ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ ಮೂರು ನೇರ ಅನುಪಾತ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಗಳು 2, 3, 4 ಮತ್ತು 5 ಸೆ.ಮೀ ಇರುವ ಚೌಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

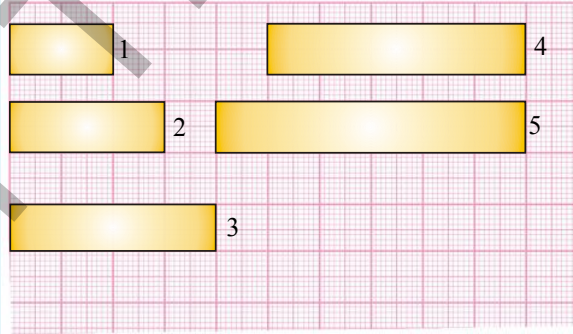
ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ (ಸೆ.ಮೀ ಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಸೆ.ಮೀ <sup>2</sup> ಗಳಲ್ಲಿ)
2	
3	
4	
5	



ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಚೌಕಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾದರೆ ಚೌಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಬದಲಾವಣೆ ಇದೆಯಾ? ಖಚಿತವಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಇರುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ? ಈ ಅನುಪಾತ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯಾ? ಇಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ.

∴ ಈ ಬದಲಾವಣೆ ನೇರ ಅನುಪಾತವಲ್ಲ.

3. ಇಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ಅಗಲ ಇರುವ ಕೆಲವು ಆಯತಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಯತಗಳು	1	2	3	4	5
ಉದ್ದ (ಸೆ.ಮೀ ಗಳಲ್ಲಿ)					
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಸೆ.ಮೀ ಗಳಲ್ಲಿ)					

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯಾ?

- 4.. ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ಉದ್ದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಗಲಗಳು ಇರುವ ಆಯತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಿ?

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ 65 ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 2600, ಆದರೆ, ಅದೇ ಪರಿಮಾಣ ಇರುವ ಇಂತಹ 75 ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ( $x$ )	65	75
ಬೆಲೆ ( $y$ )	2600	?

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \text{ ಇಲ್ಲಿ } x_1 = 65 \quad y_1 = 2600 \quad x_2 = 75 \quad y_2 = ?$$

$$\text{ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅದೇಶಿಸಿದಾಗ } \frac{65}{2600} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 2600}{65} = ₹ 3000$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ 75 ಟೀ ಪಾಕೆಟ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 3000.

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಒಂದು ರೈಲ್ವೆ ಸ್ಟೇಷನ್ ಹತ್ತಿರ ಕಾರ್ ಪಾರ್ಕಿಂಗ್ ಬೆಲೆಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿದೆ.

ಪಾರ್ಕಿಂಗ್ ಸಮಯ ( $x$ )	ಪಾರ್ಕಿಂಗ್ ಬೆಲೆ (ರೂಪಾಯಿ) ( $y$ )
4 ಗಂಟೆಗಳ ವರೆಗೆ	₹ 60
8 ಗಂಟೆಗಳ ವರೆಗೆ	₹ 100
12 ಗಂಟೆಗಳ ವರೆಗೆ	₹ 140
24 ಗಂಟೆಗಳ ವರೆಗೆ	₹ 180

ಪಾರ್ಕಿಂಗ್ ಬೆಲೆಗಳು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಕಿಂಗ್ ಮಾಡಿದ ಕಾಲ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಆದರೆ ಅವು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯೇ?  $\frac{x}{y}$  ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಂದು ವೇಳೆ  $\frac{x}{y}$  ಬೆಲೆ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆದರೆ ಅವು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅವು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

ಈ ಅನುಪಾತಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಲ್ಲ.

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** 8 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಒಂದು ಕಂಬ 10 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ನೆರಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲಿಲಿ ಅದೇ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮರ 40 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ನೆರಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ, ಆ ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ, ಕಂಬದ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಆಗ  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$  ಇಲ್ಲಿ  $x_1 = 8$  ಮೀ  $y_1 = 10$  ಮೀ  $x_2 = ?$  ಮತ್ತು  $y_2 = 40$  ಮೀ

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ  $\frac{8}{10} = \frac{x_2}{40} \Rightarrow x_2 = \frac{8 \times 40}{10} = 32$  ಮೀ

ಆಗ ಆ ಮರದ ಎತ್ತರ 32 ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಒಂದು ಕೊಳಾಯಿ(tap) 50 ಲೀಟರ್ ಗಳ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಇರುವ ಒಂದು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸಿದರೆ, 75 ಲೀಟರ್ ಗಳ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಟ್ಯಾಂಕ್ ನಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಘನಪರಿಮಾಣ  $\propto$  ಅದನ್ನು ತುಂಬಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ

ಆಗ ಇಲ್ಲಿ  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$  ಇಲ್ಲಿ  $x_1 = 50$  ಲೀಟರ್ ಗಳು  $y_1 = 5$  ಗಂಟೆ  $x_2 = 75$  ಲೀಟರ್ ಗಳು ಮತ್ತು  $y_2 = ?$

$\frac{50}{5} = \frac{75}{x} \Rightarrow x = \frac{75 \times 5}{50} = \frac{375}{50} = 7\frac{1}{2}$  ಗಂಟೆ

ಆದ್ದರಿಂದ 75 ಲೀಟರ್ ಗಳ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಇರುವ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು  $7\frac{1}{2}$  ಗಂಟೆಗಳ ಸಮಯ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** 20 ಮೀ ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ₹ 1600, ಆದರೆ ಅದೇ 24.5 ಮೀ ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಬಟ್ಟೆಯ ಉದ್ದ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ, ಆಗ  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$  ಇಲ್ಲಿ  $x_1 = 20$  ಮೀ  $y_1 = ₹ 1600$ ,  $x_2 = 24.5$  ಮೀ ಮತ್ತು  $y_2 = ?$

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ  $\frac{20}{1600} = \frac{24.5}{y_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1600 \times 24.5}{20} = ₹ 1960$

24.5 ಮೀಟರ್ ಗಳ ಬಟ್ಟೆ ಬೆಲೆ ₹ 1960.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

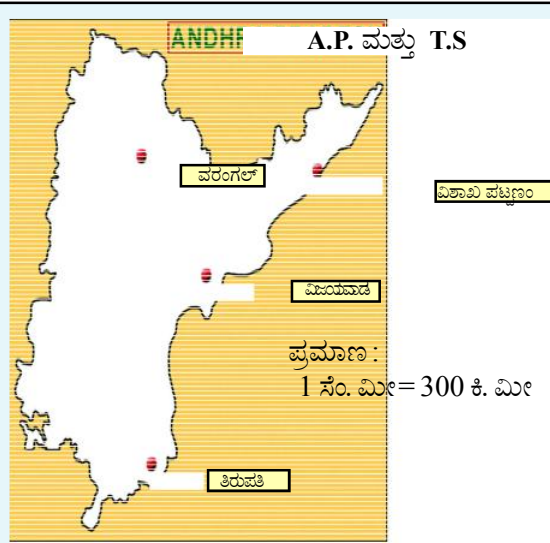
ಕೊಟ್ಟ ಮಾಪನದಲ್ಲಿನ ದೂರಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ, ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ (i) ವಿಜಯವಾಡ ಮತ್ತು ವಿಶಾಖಪಟ್ಟಣ, (ii) ತಿರುಪತಿ ಮತ್ತು ವರಂಗಲ್ ಈ ಪಟ್ಟಣಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೊಟ್ಟ ಮಾಪನ ಸ್ಕೇಲು

1: 30000000, ಸ್ಕೇಲು 1 ಸೆಂ.ಮೀ = 300 ಕಿ.ಮೀ

ಮಾಪನದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ತೋರಿಸುವುದೇ ಸ್ಕೇಲು.

ಸ್ಕೇಲು 1 ಸೆಂ.ಮೀ = 300 ಕಿ.ಮೀ

ಸ್ಕೇಲನ್ನು 1:30000000 ಸೆಂ.ಮೀ ಅನುಪಾತವಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಿರಿ. ಸೆಂ.ಮೀ. ಅನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಳತೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.



ವಿಶಾಖ ಪಟ್ಟಣಂ



## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.1

1. ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಾಳಿಕೆ ಇರುವ 5 ಮೀಟರ್ ಬಟ್ಟೆಯ ಬೆಲೆ ₹ 210. ಆದರೆ (i) 2ಮೀ (ii) 4ಮೀ (iii) 10ಮೀ (iv) 13ಮೀಟರ್ ಗಳ ಉದ್ದ ಇರುವ ಬಟ್ಟೆಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತುಂಬಿ.
 

ಅಪಿಲ್ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	4	7	12	20
ಹಣ್ಣುಗಳ ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	8	.....	.....	.....	.....
3. 48 ಅಕ್ಕಿ ಚೀಲಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 16, 800 ಆದರೆ 36 ಅಕ್ಕಿ ಚೀಲಗಳ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
4. ನಾಲ್ಕು ಸದಸ್ಯರಿರುವ ಒಂದು ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು ₹ 2,800. ಮೂವರು ಸದಸ್ಯರು ಇರುವ ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 28 ಮೀಟರ್ ಗಳ ಉದ್ದ ಇರುವ ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಕಂಬದ ಎತ್ತರ 12 ಮೀ. ಆ ಹಡಗಿನ ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಬದ ಎತ್ತರ 9 ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ ಆ ನಮೂನೆ ಹಡಗಿನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?
6. 5.6 ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಕಂಬ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ 3.2ಮೀ ಆದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ (i) 10.5 ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಬ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು? (ii) 5ಮೀ ನೆರಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದ ಕಂಬದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?
7. ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಿಂದ ತುಂಬಿದ ಒಂದು ಟ್ರಕ್ 14 ಕಿ.ಮೀ ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ 25 ನಿಮಿಷಗಳು. ಆ ಟ್ರಕ್ ಅದೇ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ಪ್ರಯಾಣಿಸುವ ದೂರ ಎಷ್ಟು?
8. ದಪ್ಪವಾಗಿರುವ 12 ಕಾಗದಗಳ ಭಾರ 40 ಗ್ರಾಂಗಳು ಆದರೆ ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ಕಾಗದಗಳ ಭಾರ  $16\frac{2}{3}$  ಕಿ.ಗ್ರಾಂಗಳಾಗುತ್ತದೆ?
9. ಒಂದು ರೈಲು ಗಂಟೆಗೆ 75 ಕಿ.ಮೀ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿದೆ.
  - (i) ಅದು 20 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಪ್ರಯಾಣಿಸಬಲ್ಲದು ?
  - (ii) 250 ಕಿ.ಮೀ ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಈ ರೈಲಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಕಾಲ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ ?
10. ಒಂದು ಮೈಕ್ರೋಚಿಪ್ ನಕ್ಷೆ (Plan) ಯ ಸ್ಕೇಲು 40:1 ಆಗಿದೆ. ನಮೂನೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಉದ್ದ 18 ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ ಆ ಮೈಕ್ರೋಚಿಪ್ ನ ನಿಜವಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಡಾಕ್ಟರ್, ಲಾಯರ್ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 40. ಡಾಕ್ಟರ್ ಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 35, ಲಾಯರ್ ಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 50, ಆದರೆ ಡಾಕ್ಟರ್ ಸಂಖ್ಯೆ, ಲಾಯರ್ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ:

1. ಭಾರದೇಶದ ಭೂಪಟ(ಮ್ಯಾಪ್) ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆ ಮ್ಯಾಪ್ ನಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರದೇಶಗಳ ಮಧ್ಯೆ ದೂರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆ ಎರಡು ಪ್ರದೇಶಗಳ ನಿಜವಾದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. 5ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಹಲ್ಲಾ ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಪದಾರ್ಥಗಳು ರವೆ = 250 ಗ್ರಾಂ, ಸಕ್ಕರೆ = 300 ಗ್ರಾಂ, ತುಪ್ಪ = 200 ಗ್ರಾಂ, ನೀರು = 500 ಮೀ.ಲೀ. ಸಮಾನುಪಾತವನ್ನು ಭಾವನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹಲ್ಲಾ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಪದಾರ್ಥಗಳ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ.



### 10.2 ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ (ವಿಲೋಮ ಮಾಪುರ್)

ಒಂದು ಪಾರ್ಕ್ ಬಟವಾಡೆ ಮಾಡುವ ಸಂಸ್ಥೆ ಹತ್ತಿರ ಕೆಲವು ಪಾರ್ಕ್ ಗಳು ಬಟವಾಡೆಗೆ ಸಿದ್ಧವಾಗಿವೆ. ಆ ಸಂಸ್ಥೆ 36 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ನಿಯಮಿಸಿದರೆ 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಅವನ್ನು ಬಟವಾಡೆ ಮಾಡಬಲ್ಲರು. 18 ಜನ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ನಿಯಮಿಸಿದರೆ ಆ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಲು 24 ದಿನಗಳ ಕಾಲ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದ್ವಿಗುಣವಾಗಿದೆ. ಆ ಸಂಸ್ಥೆ 72 ಜನ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿಯಮಿಸಿದರೆ ಬಟವಾಡೆಗೆ ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ ಅರ್ಧವಾಗುತ್ತದೆಯೇ?

ಅಗುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೇ! ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	36	18	9	72	108
ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ	12	24	48	6	4

$\div 2$     $\div 4$     $\times 2$     $\times 3$   
 $\times 2$     $\times 4$     $\div 2$     $\div 3$

ಒಂದು ವೇಳೆ ಆ ಸಂಸ್ಥೆ ಒಂದೇ ದಿನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಪಾರ್ಕ್ ಗಳನ್ನು ಬಟವಾಡೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿಯಮಿಸಬೇಕು?

ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆ (ಮಾಪುರ್), ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಯಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಯಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಟವಾಡೆಗೆ ಹಿಡಿಯುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.

ಚಿನ್ನೆ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸಬಹುದು.

$$\text{ಬಟವಾಡೆಗೆ ಹಿಡಿಯುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} \propto \frac{1}{\text{ಕಾರ್ಯನಿರತ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$x, y \text{ ಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ } x \propto \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{k}{y} \text{ ಇಲ್ಲಿ } k \text{ ಒಂದು ಅನುಪಾತೀಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕ.}$$

$$xy = k.$$

$x_1, x_2$  ಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $y_1, y_2$  ಆದರೆ

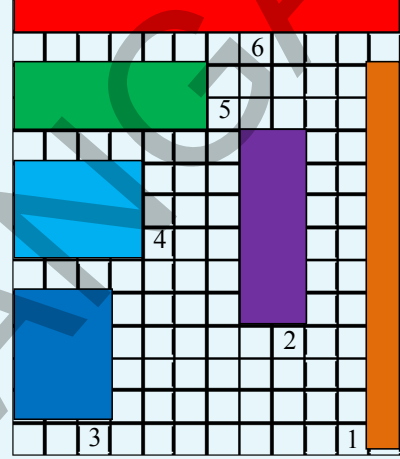
$$x_1 y_1 = x_2 y_2 (= k), \text{ ಅಥವಾ } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$



### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ ಮೂರು ವಿಲೋಮಾನ ಪಾತದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. ಚೌಕುಳಿ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಪಕ್ಕ ಪಕ್ಕಕ್ಕೆ ಇರುವ 12 ಚೌಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾ ವಿವಿಧ ಆಳತೆಗಳ ಆಯತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಹೀಗೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರತಿ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಆಯತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಉದ್ದ (ಸಂ.ಮೀಗಳಲ್ಲಿ)	ಅಗಲ (ಸಂ.ಮೀಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಚ.ಸಂ.ಮೀಗಳಲ್ಲಿ)
1	L1.....	B1.....	.....
2	L2.....	B2.....	.....
3	L3.....	B3.....	.....
4	L4.....	B4.....	.....
5	L5.....	B5.....	.....
6	L6.....	B6.....	.....



ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ? ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಅಗಲ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಅಗಲ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಉದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ( ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ವಾಗಿದ್ದಾಗ )  
ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವಿಲೋಮಾನ ಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯಾ?

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** 36 ಜನ ಕೂಲಿಗಾರರು ಒಂದು ಗೋಡೆಯನ್ನು 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಬಲ್ಲರು. ಆದರೆ ಅದೇ ಗೋಡೆಯನ್ನು 16 ಜನ ಕೂಲಿಗಾರರು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಬಲ್ಲರು ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೂಲಿಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿಲೋಮಾನಪಾತದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕೂಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ವಿಲೋಮಾನ ಪಾತದಲ್ಲಿವೆ

$$\text{ಆಗ ಇಲ್ಲಿ } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ ಇಲ್ಲಿ } x_1 = 36 \text{ ಜನ}$$

ಕೂಲಿಗಾರರು

$$y_1 = 12 \text{ ದಿನಗಳು } x_2 = 16 \text{ ಜನ ಕೂಲಿಗಾರರು ಮತ್ತು}$$

$$y_2 = ? \text{ ದಿನಗಳು}$$

ಕೂಲಿಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ

$$\downarrow \begin{matrix} 36 \\ 16 \end{matrix}$$

ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$\uparrow \begin{matrix} 12 \\ y_2 \end{matrix}$$

ಕೂಲಿಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ  $36 \div x = 16 \Rightarrow x = \frac{36}{16}$   
ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅದು ವಿಲೋಮಾನ ಪಾತದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದೆ.  
ಅದು  $x \times 12 = \frac{36}{16} \times 12$   
 $= 27$  ದಿನಗಳು

$$\text{ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, } \frac{36}{16} = \frac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{12 \times 36}{16} = 27 \text{ ದಿನಗಳು.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ 16 ಜನ ಕೂಲಿಗಾರರು ಅ ಗೋಡೆಯನ್ನು 27 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಬಲ್ಲರು.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**



ಪ್ರತಿ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನಾವು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಲ್ಲೆವೇ?

ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ 100 ಪೇಜುಗಳಿವೆ. ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಓದಿದ ಪೇಜುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಉಳಿದ ಪೇಜುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತಿದೆ ಗಮನಿಸಿರಿ?

ಓದಿದ ಪೇಜುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ( $x$ )	10	20	30	50	70
ಉಳಿದ ಪೇಜುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ( $y$ )	90	80	70	50	30

ನಾವು ಓದಿದ ಪೇಜುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆಲ್ಲಾ ಉಳಿದ ಪೇಜುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ ? ಆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ವಿಲೋಮಾನು ಪಾತದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತಿವೆಯಾ ? ವಿವರಿಸಿರಿ.



**ಅಭ್ಯಾಸ - 10.2**

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಯಾವ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ  $x, y$  ಚರರಾಶಿಗಳು ವಿಲೋಮಾನು ಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯೋ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

(i)	$x$	50	40	30	20	(ii)	$x$	100	200	300	400
	$y$	5	6	7	8		$y$	60	30	20	15

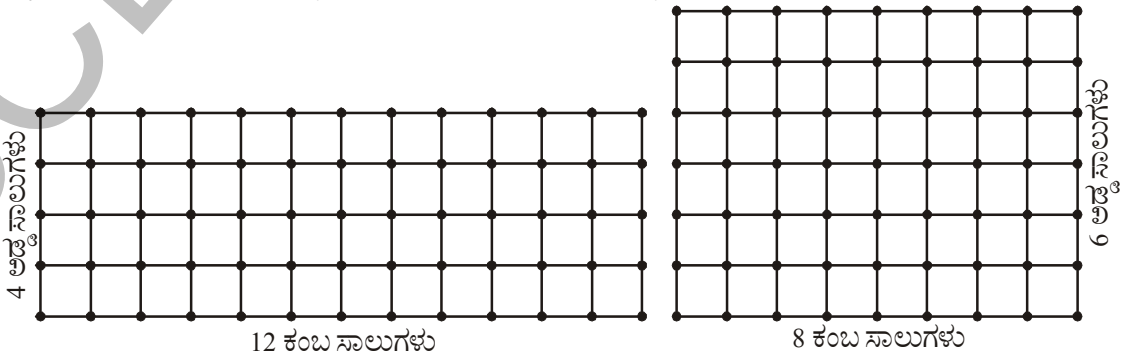
  

(iii)	$x$	90	60	45	30	20	5
	$y$	10	15	20	25	30	25

2. ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯವರು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ₹ 6000 ಖರ್ಚು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	40	50	75	
ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	150		100	75

3. ಒಂದು ಚೌಕ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. 48 ಚದರ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ವಿವಿಧ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿರಿ



ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (R)	2	3	4	6	8
ಉದ್ದ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (C)	---	---	12	8	---

ನೀವು ಎನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ? R ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, C ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

- $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$  ಅಗುತ್ತದೆಯಾ?
- $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ ? ಅಗುತ್ತದೆಯಾ?
- R ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯಾ?
- ಇದೇ ರೀತಿ ಚೌಕಗಳ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ 36 ಚದರ ಚೌಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾಡಿರಿ.

### ತರಗತಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :

ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಗೆ ಹಾಜರಾಗುವ ಮತ್ತು ಹಾಜರಾದ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ನಿಮ್ಮ ಮಿತ್ರರೊಡನೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳನ್ನು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ವಾರದಲ್ಲಿನ ದಿನಗಳು	ಹಾಜರಾದ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (x)	ಹಾಜರಾಗದ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (y)	x.y
ಸೋಮವಾರ			
ಮಂಗಳವಾರ			
ಬುಧವಾರ			
ಗುರುವಾರ			
ಶುಕ್ರವಾರ			
ಶನಿವಾರ			

ಈಗ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಒಂದು ಬಾಲಕರ ವಸತಿ ಗೃಹದಲ್ಲಿ 100 ಜನ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 40 ದಿನಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುವಷ್ಟು ಆಹಾರ ಧಾನ್ಯಗಳು ಇವೆ. ಆ ವಸತಿ ಗೃಹಕ್ಕೆ 4 ದಿನಗಳ ನಂತರ ಮತ್ತೆ 20 ಜನ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸೇರಿದರೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಆಹಾರ ಧಾನ್ಯಗಳು ಸರಿಹೋಗುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸರಿಹೋಗುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
	40	100
4 ದಿನಗಳ ನಂತರ	36	100
	x	120

ನಾಲ್ಕು ದಿನಗಳ ನಂತರ 100 ಮಂದಿ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುವ ಆಹಾರ ಧಾನ್ಯಗಳು 36 ದಿನಗಳು ಬಂದರೆ, 120 ಮಂದಿ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತದೆ.

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{36 \times 100}{120} = 30 \text{ ದಿನಗಳು}$$

ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ

$$100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$$

ಆಗ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ

$$36 \div x = 36 \div \frac{120}{100}$$

$$\Rightarrow 36 \times \frac{100}{120} = 30 \text{ ದಿನಗಳು}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 8:** ಒಂದು ಕಾರು ಗಂಟೆಗೆ 60 ಕಿ.ಮೀ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದರೆ ಗಮ್ಯಸ್ಥಾನವನ್ನು 4 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಕಾರು ಗಂಟೆಗೆ 80 ಕಿ.ಮೀ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಗಮ್ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೇರುವುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :**

<p>ಪದ್ಧತಿ I</p> <p>ವೇಗ 60 80</p> <p>ಕಾಲ 4 x</p> <p>(ಅಥವಾ)</p> $\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$ $60 \times 4 = 80 \times x$ $x = \frac{60 \times 4}{80} = 3 \text{ ಗಂ}$	<p>ಪದ್ಧತಿ II</p> <p>ವೇಗ 60 80</p> <p>ಕಾಲ 4 y</p> <p><math>x \times \left( \frac{60}{80} \right)</math></p> $60 \times x = 80 \text{ ಮತ್ತು } 4 \div x = y$ $x = \frac{80}{60}$ $4 \div \frac{80}{60} = y$ $y = \frac{4 \times 60}{80} = 3 \text{ ಗಂ}$
---	--

**ಉದಾಹರಣೆ 9:** ಒಂದು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ್ನು ತುಂಬಲು 6 ಪಂಪುಗಳಿಗೆ 1 ಗಂಟೆ 20 ನಿಮಿಷಗಳ ಕಾಲ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ. ಅವೇ ಪಂಪುಗಳಲ್ಲಿ 5 ನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ನೀರು ತುಂಬಲು ಬಿಟ್ಟರೆ ಆ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ು ಎಷ್ಟು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತುಂಬುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** 5 ಪಂಪುಗಳು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ್ನು ತುಂಬಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ x ನಿಮಿಷ ಇರಲಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ

ಪಂಪುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	5
ಸಮಯ (ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ)	80	x

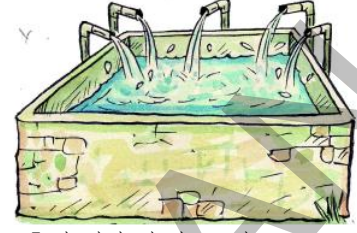
ಪಂಪುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ್ನು ತುಂಬಲು ಹಿಡಿಯುವ ಸಮಯ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಲೋಮಾನು ಪಾತದಲ್ಲಿ ದೆ

ಅದ್ದರಿಂದ,  $80 \times 6 = x \times 5$   $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

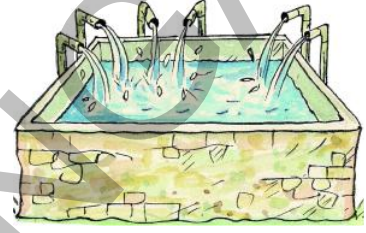
$$\text{ಅಥವಾ } \frac{80 \times 6}{5} = x$$

$x = 96$  ನಿಮಿಷಗಳು.

5 ಪಂಪುಗಳು ಆ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ 96 ನಿಮಿಷಗಳು ಅಥವಾ 1 ಗಂಟೆ 36 ನಿಮಿಷಗಳು.



5 ಪಂಪುಗಳಿರುವ ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕ್



6 ಪಂಪುಗಳಿರುವ ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕ್



### ಅಭ್ಯಾಸ - 10.3

1. ಸಿರಿ ಹತ್ತಿರ ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ 8 ರೂಪಾಯಿಗಳಂತೆ 5 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಕೊಳ್ಳಲು ಸರಿಹೋಗುವ ಹಣ ಇದೆ. ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳ ಬೆಲೆ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.10 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಬೆಳೆದರೆ ಅವಳ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಹಣದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲಳು?
2. ಒಂದು ಶಿಬಿರದಲ್ಲಿ 500 ಜನ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ 70 ದಿನಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುವ ಆಹಾರ ಧಾನ್ಯಗಳ ಶೇಕರಣೆ ಇದೆ. ಆ ಶಿಬಿರದಲ್ಲಿ ಹೊಸದಾಗಿ 200 ಜನ ಸೇರಿದರೆ ಆ ಆಹಾರ ಧಾನ್ಯಗಳ ಶೇಕರಣೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತದೆ?
3. 36 ಜನ ಕೂಲಿಗಳು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಲ್ಲರು ಆದರೆ ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು 9 ಜನ ಕೂಲಿಗಳು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಲ್ಲರು?
4. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಸೈಕಲ್ ಮೇಲೆ 28 ಕಿ.ಮೀ ದೂರವನ್ನು 2 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತಾನೆ. ಅತನು ಅದೇ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ 56 ಕಿ.ಮೀ ದೂರವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸೇರಬಲ್ಲನು ?
5. ಒಂದು ಹಡಗು 16 ನಾಟಿಕಲ್ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರವನ್ನು 10 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಬಲ್ಲದು. ಅದೇ ದೂರವನ್ನು 8 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಬೇಕಾದರೆ ಆ ಹಡಗು ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಬೇಕು? ಸಮುದ್ರದ ಮೇಲೆ ದೂರಕ್ಕೆ ಪ್ರಮಾಣ ನಾಟಿಕಲ್ ಮೈಲ್ (1 ನಾಟಿಕಲ್ ಮೈಲ್ = 1852 ಮೀಟರ್ ಗಳು)
6. 5 ಪಂಪುಗಳು ಒಂದು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು  $1\frac{1}{2}$  ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ಅರ್ಧಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸಲು ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ಪಂಪುಗಳು ಬೇಕು ?
7. 15 ಜನ ಕೂಲಿಗಳು ಒಂದು ಗೋಡೆಯನ್ನು 48 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಬಲ್ಲರು. ಅದೇ ಗೋಡೆಯನ್ನು 30 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಜನ ಅಧಿಕ ಕೂಲಿಗಳು ಬೇಕು?
8. ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 45 ನಿಮಿಷಗಳ ಕಾಲಾವಧಿಯ 8 ಪಿರಿಯಡ್‌ಗಳಿವೆ. ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ 6 ಪಿರಿಯಡ್‌ಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಇರಬೇಕಾದರೆ ಒಂದು ಪಿರಿಯಡ್ ಕಾಲಾವಧಿ ಎಷ್ಟು ಇರಬೇಕು? (ಪಾಠಶಾಲೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಬೇಕು)

9.  $Z$ ,  $x$  ಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು  $y$  ಗೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.  $x$  ನಲ್ಲಿ 12% ಹೆಚ್ಚಾದರೆ  $y$  ನಲ್ಲಿ 20% ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ  $Z$  ನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಧಿಕ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
10.  $x + 1$  ಜನ ಕೆಲಸಗಾರರು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು  $x + 1$  ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಲ್ಲರು. ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು  $(x + 2)$  ಜನ ಕೆಲಸಗಾರರು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಲ್ಲರು?
11. ಸುತ್ತಳತೆ 24 ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೇ ಉದ್ದವನ್ನು 1 ಮೀ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಅಗಲ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತುಂಬಿ ಆ ಬೆಲೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅಗಲ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಉದ್ದದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಮಾರ್ಪಡೆಯ ವಿಧವಾಗಿ ಅಧಾರ ಪಟ್ಟಿಯೋ ಗಮನಿಸಿರಿ. ನಿವೃತ್ತ ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ನಿಮ್ಮ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳನ್ನು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉದ್ದ (ಸಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ಅಗಲ (ಸಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	11	10	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಚ.ಸಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	11	20	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

### 10.3 ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತ (ಜಂಟಿ ಮಾರ್ಪಡೆ)

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆ, ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಬದಲಾವಣೆ (ಮಾರ್ಪಡೆ)ಯನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡಬಹುದು. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೊದಲ ರಾಶಿಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಉಳಿದ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

- (i) ಒಂದು ರಾಶಿ, ಉಳಿದ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬಹುದು.
  - (ii) ಒಂದು ರಾಶಿ, ಉಳಿದ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬಹುದು.
  - (iii) ಒಂದು ರಾಶಿ ಉಳಿದ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು.
- ಉದಾಹರಣೆ 10: 35 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 24 ದಿನಗಳಿಗೆ ಊಟಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು ₹6300 ಆದರೆ 25 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 18 ದಿನಗಳಿಗೆ ಊಟಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ ?

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿನ ಮೂರು ರಾಶಿಗಳಿವೆ ಅವು ಊಟದ ಖರ್ಚು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವೆ.

ಊಟದ ಖರ್ಚು (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
6300	35	24
? ( $x$ )	25	18
$6300 : x$	$35 : 25 = 7 : 5$	$24 : 18 = 4 : 3$

ಊಟದ ಖರ್ಚು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.

ಊಟದ ಖರ್ಚು  $\propto$  ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$6300 : x = 7 : 5$$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಊಟದ ಖರ್ಚು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.

ಊಟದ ಖರ್ಚು  $x$  ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$6300 : x = 4 : 3$$

ಇಲ್ಲಿ ಊಟದ ಖರ್ಚು ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮೇಲೆ ಎಂದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಊಟದ ಖರ್ಚು  $x$  ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತ

$$6300 : x = 7 : 5 \text{ ಮತ್ತು } 4 : 3 \text{ ಗಳ ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತ}$$

$$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$$

$$\overline{6300 : x = 28 : 15}$$

ಅಂತ್ಯಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = ಮಧ್ಯಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$28 \times x = 15 \times 6300$$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

$$x = ₹ 3375.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಊಟಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು ₹ 3375.

ಉದಾಹರಣೆ : 24 ಜನ ಕೆಲಸಮಾಡುವವರು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ದಿನಕ್ಕೆ 6 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಾ 14 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಬಲ್ಲರು. ಆದರೆ ದಿನಕ್ಕೆ 7 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಾ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 8 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಬೇಕಾದ ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿನಮಗೆ ಮೂರು ರಾಶಿಗಳು ಎಂದರೆ ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ, ದಿನಕ್ಕೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಮಯ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವೆ.

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	ದಿನಕ್ಕೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಮಯ	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
24	6	14
? ( $x$ )	7	8
$24 : x$	$6 : 7$	$14 : 8 = 7 : 4$

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಮಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ  $x$  ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಅವಧಿ

$$24 : x = \text{ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ } 6 : 7 \text{ ಎಂದರೆ } 7 : 6$$



⇒ 24 : x ಎನ್ನುವುದು 7 : 6 ಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕೆಲಸಗಾರ ಸಂಖ್ಯೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ} \propto \frac{1}{\text{ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

24 : x = 7 : 4 ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ ಎಂದರೆ 4 : 7

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮೇಲೆ ಎಂದರೆ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಮಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ∝ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ ಮತ್ತು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳ ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತ

24 : x = 7 : 6 ಮತ್ತು 4 : 7ಗಳ ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತ

$$24 : x = 7 \times 4 : 6 \times 7$$

$$24 : x = 4 : 6$$

$$24 : x = 2 : 3 \quad \text{ಅಂತ್ಯಪದಗಳ ಲಬ್ಧ = ಮಧ್ಯಪದಗಳ ಲಬ್ಧ}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{2 \times x = 24 \times 3} \\ x = 36 \end{array}$$

ಬೇಕಾದ ಕೆಲಸ ಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ = 36.

ಪರ್ಯಾಯ ಪದ್ಧತಿ

$$\frac{24}{x} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \times x = 24 \times 3$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

**ಉದಾಹರಣೆ 12:** 12 ಜನ ಪೆಂಟರ್‌ರು 180 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಉದ್ದ ಇರುವ ಗೋಡೆಗೆ 3 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಬಲ್ಲರು. ಆದರೆ 200 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಉದ್ದ ಇರುವ ಗೋಡೆಗೆ 5 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಜನ ಪೆಂಟರ್‌ಗಳು ಬೇಕು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ ಪೆಂಟರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪೆಂಟರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
12	180	3
x	200	5
12 : x	180 : 200 = 9 : 10	3 : 5

ಪೆಂಟರ್ ಸಂಖ್ಯೆ ∝ ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)

$$12 : x = 9 : 10 \quad \text{---- (1) ಮತ್ತು}$$

$$\text{ಪೆಂಟರ್ ಸಂಖ್ಯೆ} \propto \frac{1}{\text{ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$12 : x =$  ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ  $3 : 5$ ನ

$12 : x = 5 : 3$  ---- (2)

(1), (2) ಗಳಿಂದ

$12 : x = 9 : 10$  ಮತ್ತು  $5 : 3$  ಗಳ ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತ

$12 : x = (9 : 10) \times (5 : 3)$

$12 : x = 9 \times 5 : 10 \times 3$

$12 : x = 45 : 30 = 3 : 2$

$12 : x = 3 : 2$  (ಅಂತ್ಯಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = ಮಧ್ಯಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ)

$3 \times x = 12 \times 2$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

ಬೇಕಾದ ಪೇಂಟರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 8

ಪರ್ಯಾಯ ಪದ್ಧತಿ

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$$

$$12 \times 2 = 3 \times x$$

4

$$x = \frac{12 \times 2}{3} = 8$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 10.4

- 8 ಜನಕ್ಕೆ 20 ದಿನಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಆಕ್ಕಿಯ ಬೆಲೆ ರೂ.480. 12 ಜನಕ್ಕೆ 15 ದಿನಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಆಕ್ಕಿಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
- 10 ಜನ ಕೆಲಸಗಾರರು 75 ಕಿ.ಮೀ. ಉದ್ದ ಇರುವ ರಸ್ತೆಯನ್ನು 5 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಕಬಲ್ಲರು 15 ಜನ ಕೆಲಸಗಾರರು 45 ಕಿ.ಮೀ. ಉದ್ದ ಇರುವ ರಸ್ತೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಕಬಲ್ಲರು ?
- ದಿನಕ್ಕೆ 8 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತಾ 24 ಜನ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 15 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಲ್ಲರು. ದಿನಕ್ಕೆ 9 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಾ 20 ಜನ ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಲ್ಲರು ?
- 175 ಜನ ಕೆಲಸಗಾರರು 36 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 3150 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಉದ್ದ ಇರುವ ಕಾಲುವೆಯನ್ನು ತೋಡಬಲ್ಲರು . 3900 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಉದ್ದ ಇರುವ ಕಾಲುವೆಯನ್ನು 24 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ತೋಡುವುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಜನ ಕೆಲಸಗಾರರು ಬೇಕು?
- 14 ಜನ ಟೈಪಿಸ್ಟ್ ದಿನಕ್ಕೆ 6 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತಾ 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಟೈಪು ಮಾಡಬಲ್ಲರು. ಆದರೆ ಅದೇ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು 4 ಜನ ಟೈಪಿಸ್ಟ್ ದಿನಕ್ಕೆ 7 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತಾ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಟೈಪು ಮಾಡಬಲ್ಲರು ?



**ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು**

- $x$  ಮತ್ತು  $y$  ಎನ್ನುವ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ ಅದು  $\frac{x}{y} = k$  ಅಥವಾ  $x = ky$ . ಇದನ್ನು ನಾವು  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$  ಅಥವಾ  $x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$  [ಇಲ್ಲಿ  $x_1, x_2$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $y_1, y_2$  ]
- ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು  $x$  ಮತ್ತು  $y$  ಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ  $xy = k$ . ( $k$  ಬಿಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) ನಂತಹ ಸಂಬಂಧ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ.  $x_1, x_2$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $y_1, y_2$  ಆದರೆ  $x_1 y_1 = x_2 y_2 (= k)$ , ಅಥವಾ  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ .
- ಒಂದು ರಾಶಿಯ ಹೆಚ್ಚಳ (ಕಡಿಮೆ) ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯ ಕಡಿಮೆ (ಹೆಚ್ಚಳ) ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆಗ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯ ಅನುಪಾತ ( $x_1 : x_2$ ) ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯ ಅನುಪಾತ ( $y_1 : y_2$ ) ಗಳಿಗೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿಲೋಮ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ಕೆಲವು ಸಲ ಒಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆ, ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಬದಲಾವಣೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನಾವು ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಮೊದಲ ರಾಶಿಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಉಳಿದೆರಡು ಸಂಯುಕ್ತಾನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

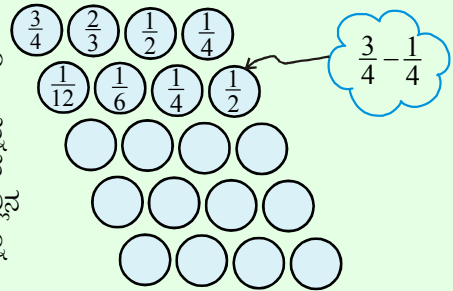
**ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯವಕಲನ Diffy**

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು (Diffy) ಡಿಫ್ಫಿ ಎನ್ನುವರು. ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಕಳೆಯುವುದು ನಡೆಯುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ (Diffy) ಎನ್ನುವ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ) ಕಳೆಯುವುದರ ಮೇಲೆ ಚಾಕಚಕ್ಯತೆ ಹೊಂದುವುದು.

ಸೂಚನೆಗಳು :

- ಹಂತ 1 : ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರೆದು ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.
- ಹಂತ 2 : ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುತ್ತಾ ಅವುಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲವು ದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಫಲಿತವನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕನೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರೆಯಬೇಕು.
- ಹಂತ 3 : ಉಳಿದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ತುಂಬಲು ಹಂತ 2 ನಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 0 ಬರುವವರೆಗೆ ಮಾಡಿರಿ.
- ಹಂತ 4 : ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತೆ ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನ ದಿಂದ ಬರೆಯುತ್ತಾ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾ :  $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$  ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.



## ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು

### 11.0 ಪರಿಚಯ

ಕೆಳಗಿನ ಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

(i)  $3 + 8 - 9$  (ii)  $\frac{1}{3}xy$  (iii)  $0$  (iv)  $3x + 5$  (v)  $4xy + 7$  (vi)  $15 + 0 - 19$  (vii)  $\frac{3x}{y} (y \neq 0)$

(i), (iii) ಮತ್ತು (vii) ಸಂಖ್ಯಾ ಪದೋಕ್ತಿಗಳು (ii), (iv) ಮತ್ತು (v) ಗಳು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು.

ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವಿರಾ?

ನೀವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲೀರಿ. ವಿವಿಧ ಚರಾಕ್ಷರ, ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು ಆಲ್ಲವೇ!  $3x + 5$ , ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ 'x' 3, 5 ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು,  $3x$  ಎನ್ನುವುದು ಬೀಜಪದ ಮತ್ತು 5 ಸಂಖ್ಯಾಪದ.  $x$ ,  $y$  ಚರಾಕ್ಷರ, 4 ಮತ್ತು 7 ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಗಳಿಂದ  $4xy + 7$  ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

$\frac{1}{3}xy$  ನಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1, ಮತ್ತು  $2xy + pq - 3$  ನಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3.

ಒಂದು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಪದಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಸಂಕಲನ ಅಥವಾ ವ್ಯವಕಲನ ದಿಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ.

$3x + 5$  ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.  $x = 2$  ಅದರೆ, ಬೀಜೋಕ್ತಿ  $3(2) + 5 = 6 + 5 = 11$ , ವಿವಿಧ  $x$  ನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ  $3x + 5$  ಬೀಜೋಕ್ತಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.



#### ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

- ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿನ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.  
 $5xy^2, 5xy^3 - 9x, 3xy + 4y - 8, 9x^2 + 2x + pq + q.$
- $x$  ನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ  $3x + 5$  ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚರಾಕ್ಷರ, ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು  $5xy^2, 5xy^3 - 9x, 3xy + 4y - 8$  ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಅರ್ಥವಾಗುವುದೇನೆಂದರೆ  $5xy^2$  ಏಕಪದೋಕ್ತಿ,  $5xy^3 - 9x$  ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ,  $3xy + 4y - 8$  ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ,

$5x^2y$  ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ '3' ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು  $5xy^3 - 9x$  ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ '4'.

ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ ಚರಾಕ್ಷರ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವಾದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಅ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಹಾಗೆಯೇ  $3xy + 4y - 8$  ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ '2'.

ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಪದವಿದ್ದರೆ ಏಕಪದೋಕ್ತಿ, ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಎಂದು, ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಶೂನ್ಯೇತರ ಸಹ ಗುಣಗಳಿಂದ ಒಂದು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

### 11.1 ಸಜಾತಿ ಮತ್ತು ವಿಜಾತಿ ಪದಗಳು :

ಕೆಳಗಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$2x, 3x^2, 4x, -5x, 7x^3$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ  $2x, 4x$  ಮತ್ತು  $-5x$  ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಬೀಜಪದ  $x$ , ಒಂದೇ ಘಾತ (1) ಹೊಂದಿದೆ. ಇಂತಹ ಪದಗಳನ್ನು ಸಜಾತಿ ಪದಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಸಜಾತಿ ಪದಗಳಿಗೆ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇರದೆ ಹೋಗಬಹುದು.  $8p, 8q$  ಸಜಾತಿ ಪದಗಳೇಕೆ ಅಗುವುದಿಲ್ಲ? ಹಾಗೆಯೇ  $8p, 8pq$  ಗಳು ಮತ್ತು  $8p, 8p^2$  ಗಳ ಸಜಾತಿ ಪದಗಳಲ್ಲ ಏಕೆ?



#### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ  
 $ax^2y, 2x, 5y^2, -9x^2, -6x, 7xy, 18y^2$ .
2.  $5pq^2$  ಗೆ 3 ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿ.

### 11.2 ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ

ಉದಾಹರಣೆ :1  $5x^2 + 3xy + 2y^2$  ಮತ್ತು  $2y^2 - xy + 4x^2$  ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ಬರುವಂತೆ ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಗದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 3xy + 2y^2 \\ + 4x^2 - xy + 2y^2 \\ \hline 9x^2 + 2xy + 4y^2 \end{array}$$

#### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ



1. ಶೀಲಾ  $2pq, 4pq$  ಗಳೊತ್ತ  $8p^2q^2$  ಎಂದು ಹೇಳಿದಳು. ಉತ್ತರ ಸರಿಯೇ? ನಿಮ್ಮ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೂಡಿ.
2. ರೆಹಮಾನು  $4x$  ನ್ನು  $7y$  ಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ  $11xy$  ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಅವನೊಂದಿಗೆ ಸಹಮತಿಸುವಿರಾ?

ಉದಾಹರಣೆ :2  $2xy + 9x^2$  ನ್ನು  $12xy + 4x^2 - 3y^2$  ನಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದನ್ನು ಬರೆದು ವ್ಯವಕಲನ ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಸಂಕಲನ ಮಾಡ ಬೇಕು.

$$\begin{array}{r} 2xy + 9x^2 \\ (-) 12xy + 4x^2 - 3y^2 \\ \hline 10xy - 5x^2 - 3y^2 \end{array}$$

ಎರಡನೇ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದದ ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಿ.

[ಸೂಚನೆ : ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದೆಂದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕೂಡುವುದೇ ಆ ವಿಧವಾಗಿ-3 ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದೆಂದರೆ +3ನ್ನು ಕೂಡುವುದೇ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ  $9x^2$  ಕಳೆಯುವುದೆಂದರೆ  $-9x^2$  ನ್ನು ಕೂಡುವುದೇ.  $-3xy$  ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದೆಂದರೆ  $+3xy$  ನ್ನು ಕೂಡುವುದೆಂದರ್ಥ].



ಇವು ಮಾಡಿರಿ.

1.  $A = 2y^2 + 3x - x^2$ ,  $B = 3x^2 - y^2$  ಮತ್ತು  $C = 5x^2 - 3xy$  ಆದರೆ

(i)  $A+B$  (ii)  $A-B$  (iii)  $B+C$  (iv)  $B-C$  (v)  $A+B+C$  (vi)  $A+B-C$

### 11.3 ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ :

ಪರಿಚಯ : (i) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚುಕ್ಕೆಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡಿರಿ

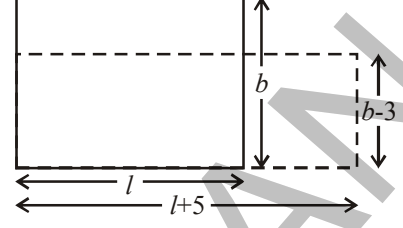
ಚುಕ್ಕೆಗಳ ವಿನ್ಯಾಸ	ಒಟ್ಟು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
	ಅಡ್ಡ × ಕಂಬ $4 \times 9$
	$5 \times 7$
	$m \times n$
	$(m+2) \times (n+3)$

ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಲು ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಲುವು ಸಾಲಿನ ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 2, ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡಿದ . (ಅಂದರೆ  $m+2$ ) ನಿಲುವು ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3, ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡಿದ, ಅಂದರೆ  $n+3$

- (ii) ನೀವು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬರೆಯಲು ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.

$l$  ಉದ್ದ,  $b$  ಅಗಲವಾಗಿ ಅಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 5 ಯೂನಿಟ್ ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡಿ ಅಂದರೆ  $(l + 5)$  ಆಗಿ ಅಗಲವನ್ನು 3 ಯೂನಿಟ್ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ (ಅಂದರೆ  $b - 3$ ) ಯೂನಿಟ್‌ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ  $(l + 5) \times (b - 3)$  ಚ.ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.



- (iii) ಘನಪಲದ ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ? (ಆಯತಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಅದರ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕೊಡುತ್ತದೆ.)

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕೆಂದರೆ  $(l+5) \times (b-3)$  ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

- (iv) ನಾವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: ಡಜನು ಬಾಳೆಹಣ್ಣಿನ ಬೆಲೆ ₹ p ಗಳು,

ಪಾಠಶಾಲೆ ವಿಹಾರ ಯಾತ್ರೆಗೆ z ಡಜನು ಅವಶ್ಯಕವಾದರೆ

$$\text{ನಾವು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} = ₹ p \times z$$

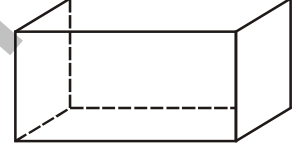
ಒಂದು ವೇಳೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ 2 ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಹಿಂದೆ ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬ z ಡಜನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 4 ಡಜನ್ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ,

ಕೊಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$$\text{ಬಾಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿ ಡಜನಿಗೆ} = ₹ (p - 2) \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\text{ಬಾಳೆ ಹಣ್ಣು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಡಜನ್‌ಗಳು} = (z - 4) \text{ ಡಜನ್‌ಗಳು,}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} = ₹ (p - 2) \times (z - 4)$$



ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ವೇಗ, ಕಾಲವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ, ಆಸಲು, ಬಡ್ಡಿದರ ಕಾಲ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಮತ್ತೆರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಆಧವಾ ಆದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳಿಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ರಾಶಿಗಳು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎರಡು ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ

## 11.4 ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿ ಯಿಂದ ಏಕಪದೋಕ್ತಿ ಗುಣಿಸುವುದು

### 11.4.1 ಎರಡು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದು.

ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಂತೆ

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

ಮತ್ತು  $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(i)  $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii)  $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

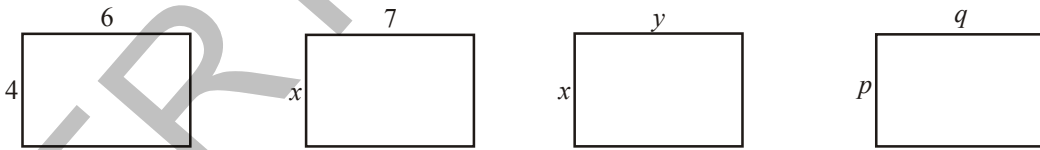
(iii)  $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$   
 $= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv)  $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$   
 $= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v)  $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$   
 $= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

ಎರಡು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರ ಘಾತಾಂಕ ಪದಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆಯೋ ಗಮನಿಸಿರಿ. ಘಾತಾಂಕ ಪದಗಳನ್ನು ಸುಲಭೀಕರಿಸಲು ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.



ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $4 \times 6 = 24$     ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $x \times 7 = \dots\dots$     ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $x \times y = \dots\dots$     ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\dots\dots \times \dots\dots = \dots\dots$

ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. :-

1.  $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2.  $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3.  $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4.  $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5.  $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$



- ಸೂಚನೆ (i) ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ  
(ii) ಎರಡು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ  
(iii) ಒಂದು ಧನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ



### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಮೊದಲನೇ ಏಕಪದೋಕ್ತಿ	ಎರಡನೇ ಏಕಪದೋಕ್ತಿ	ಎರಡು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	.....
$3abc$	$5bcd$	.....
$mn$	$-4m$	.....
$-3mq$	$-3nq$	.....

2. ಎರಡು ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿಯೇನಾ ? ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

### 11.4.2 ಮೂರು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3:  $5x$ ,  $6y$  ಮತ್ತು  $7z$  ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲನೇ ಪದ್ಧತಿ	ಎರಡನೇ ಪದ್ಧತಿ
$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$ $= 30xy \times 7z$ $= 210xyz$	$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$ $= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$ $= 210xyz$

ಉದಾಹರಣೆ 4:  $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$  ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ :

$$= 3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$$

$$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$$

$$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$$

$$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6.$$

ಉದಾಹರಣೆ 5:  $3x$ ,  $-4xy$ ,  $2x^2$ ,  $3y^2$ , ಮತ್ತು  $5x^3y^2$  ರ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

$$3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$$

$$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$$

$$= -360x^7y^5.$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯೇ ಬರುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.



## ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

- ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿ ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(i)  $6, 7k$       (ii)  $-3l, -2m$       (iii)  $-5t^2 - 3t^2$       (iv)  $6n, 3m$       (v)  $-5p^2, -2p$
- ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಕೊಷ್ಟಕವನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಿ.

X	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	$x^2y^2$
$3x$	$15x^2$	....	....	....	....	....	....	....
$4y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2y^2$	....	....	....	....	....	....
$6xy$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$3x^2y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2xy^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$5x^2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....

- ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಆಯತಗಳ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೋಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಉದ್ದ	ಅಗಲ	ಎತ್ತರ	ಘನಫಲ $(v) = l \times b \times h$
(i)	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
(ii)	$3a^2$	4	$5c$	$v = \dots\dots\dots$
(iii)	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v = \dots\dots\dots$
(iv)	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v = \dots\dots\dots$
(v)	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v = \dots\dots\dots$

- ಕೆಳಗಿನ ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(i)  $xy, x^2y, xy, x$       (ii)  $a, b, ab, a^3b, ab^3$       (iii)  $kl, lm, km, klm$   
(iv)  $pq, pqr, r$       (v)  $-3a, 4ab, -6c, d$
- $A = xy, B = yz$  ಮತ್ತು  $C = zx$ , ಆದರೆ  $ABC = \dots\dots\dots$
- If  $P = 4x^2, T = 5x$  ಮತ್ತು  $R = 5y$ , ಆದರೆ  $\frac{PTR}{100} = \dots\dots\dots$
- ಸ್ವಂತವಾಗಿ ಕೆಲವು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 11.5 ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರ

### 11.5.1 ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು.

ಏಕಪದೋಕ್ತಿ  $5x$  ಮತ್ತು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ  $6y+3$  ಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದು.

ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ ಕ್ರಮ ( ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೇ )

ಹಂತ	ಸೂಚನೆಗಳು	ವಿಧಾನ ಕ್ರಮ
1.	ಏಕಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ನಡುವೆ ಗುಣಾಕಾರ ಚಿಹ್ನೆ ಇಟ್ಟು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.	$5x \times (6y+3)$
2.	ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಮೊದಲನೆ ಪದದಿಂದ ನಂತರ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಎರಡನೆ ಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.	$(5x \times 6y) + (5x \times 3)$
3.	ಪದಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಿರಿ	$30xy + 15x$

ಆದ್ದರಿಂದ  $5x$  ಮತ್ತು  $6y+3$  ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{aligned} \text{ಪರಿಹಾರ : } \quad 5x(6y + 3) &= 5x \times (6y + 3) \\ &= (5x \times 6y) + (5x \times 3) \\ &= 30xy + 15x \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 6:  $(-4xy)(2x - y)$  ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಪರಿಹಾರ : } \quad (-4xy)(2x - y) &= (-4xy) \times (2x - y) \\ &= (-4xy) \times 2x + (-4xy) \times (-y) \\ &= -8x^2y + 4xy^2 \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 7:  $(3m - 2n^2)(-7mn)$  ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಪರಿಹಾರ : } \quad (3m - 2n^2)(-7mn) &= (3m - 2n^2) \times (-7mn) \\ &= (-7mn) \times (3m - 2n^2) \\ &= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2) \\ &= -21m^2n + 14mn^3 \end{aligned}$$

∴ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ



ಇವು ಮಾಡಿರಿ.

- (i)  $3x(4ax + 8by)$  (ii)  $4a^2b(a-3b)$  (iii)  $(p + 3q^2)pq$  (iv)  $(m^3 + n^3)5mn^2$   
ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ?

### 11.5.2 ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು.

ಏಕಪದೋಕ್ತಿ  $2x$  ಮತ್ತು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ  $(3x + 4y - 6)$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

ಆವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ =  $2x \times (3x + 4y - 6)$

$$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6)) \quad (\text{ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ})$$

$$= 6x^2 + 8xy - 12x$$

ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು  
ಏಕಪದೋಕ್ತಿ  
ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ  
ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ ಎಷ್ಟು  
ಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ



### ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

1. ಕೊಷ್ಟಕವನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ:

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಮೊದಲನೆಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿ	ಎರಡನೆಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿ	ಗುಣಲಬ್ಧ
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	.....
3	$ab^2$	$a+b^2+c^3$	.....
4	$x-2y+3z$	$xyz$	.....
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	.....

2.  $4y(3y+4)$  ನ್ನು ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಿ

3.  $x(2x^2-7x+3)$  ನ್ನು ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಿ (i)  $x = 1$  ಮತ್ತು (ii)  $x = 0$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.  $a(a-b)$ ,  $b(b-c)$ ,  $c(c-a)$

5. ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.  $x(x+y-r)$ ,  $y(x-y+r)$ ,  $z(x-y-z)$

6.  $3x(x+2y)$  ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ  $2x(5x-y)$  ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ.

7.  $3k(5k-l+3m)$  ದಿಂದ  $6k(2k+3l-2m)$  ನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ.

8.  $a^2(a-b+c)+b^2(a+b-c)-c^2(a-b-c)$  ನ್ನು ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಿ

### 11.6 ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು

#### 11.6.1 ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಗುಣಾಕಾರ :

ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ  $5x+6y$  ಮತ್ತು  $3x-2y$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

ಈಗ ನಾವು  $5x+6y$  ಮತ್ತು  $3x-2y$  ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ ಕ್ರಮ :

ಹಂತ	ಸೂಚನೆಗಳು	ವಿಧಾನಕ್ರಮ
1.	ಎರಡು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ	$(5x+6y)(3x-2y)$
2.	ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲನೆ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಎರಡನೆ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಗುಣಿಸಿ ನಂತರ ಮೊದಲನೆ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಎರಡನೆ ಪದದಿಂದ ಎರಡನೆ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಗುಣಿಸಿ ಸಂಕಲನವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.	$5x(3x-2y)+6y(3x-2y)$ $= (5x \times 3x) - (5x \times 2y) + (6y \times 3x) - (6y \times 2y)$
3.	ಪದಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಿ	$(5x \times 3x) - (5x \times 2y) + (6y \times 3x) - (6y \times 2y)$ $= 15x^2 - 10xy + 18xy - 12y^2$
4.	ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿರಿ.	$15x^2 + 8xy - 12y^2$

ಆದ್ದರಿಂದ  $5x + 6y$  ಮತ್ತು  $3x - 2y$  ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\begin{aligned}
 &= (5x + 6y)(3x - 2y) \\
 &= 5x(3x - 2y) + 6y(3x - 2y) \quad (\text{ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ}) \\
 &= (5x \times 3x) - (5x \times 2y) + (6y \times 3x) - (6y \times 2y) \\
 &= 15x^2 - 10xy + 18xy - 12y^2 \\
 &= 15x^2 + 8xy - 12y^2
 \end{aligned}$$



### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

- ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ
  - $(a - b)(2a + 4b)$
  - $(3x + 2y)(3y - 4x)$
  - $(2m - l)(2l - m)$
  - $(k + 3m)(3m - k)$
- ಎರಡು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ?

### 11.6.2 ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು.

ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ  $2x + 3y$  ಮತ್ತು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ  $3x + 4y - 5z$  ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈಗ ನಾವು  $2x + 3y$  ನ್ನು  $3x + 4y - 5z$  ರಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ.

ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ ಕ್ರಮ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಹಂತ	ಸೂಚನೆಗಳು	ವಿಧಾನ ಪದ್ಧತಿ
1.	ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಮಧ್ಯೆ ಗುಣಾಕಾರ ಚಿಹ್ನೆ ಇಟ್ಟು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.	$(2x+3y)(3x+4y-5z)$
2.	ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ : ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಯಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೆ ಪದದಿಂದ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಗುಣಿಸಿ ನಂತರ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಎರಡನೆ ಪದದೊಂದಿಗೆ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ	$(2x \times 3x) + (2x \times 4y) - (2x \times 5z) + (3y \times 3x) + (3y \times 4y) - (3y \times 5z)$
4.	ಸಜಾತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ	$6x^2 + 8xy - 10xz + 9xy + 12y^2 - 15yz$ $6x^2 + 17xy - 10xz + 12y^2 - 15yz$

ಆದ್ದರಿಂದ  $(2x+3y)$  ಮತ್ತು  $(3x+4y-5z)$  ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$$

$$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z) \quad (\text{ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ})$$

$$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) - (2x \times 5z) + (3y \times 3x) + (3y \times 4y) - (3y \times 5z)$$

$$= 6x^2 + 8xy - 10xz + 9xy + 12y^2 - 15yz$$

$$= 6x^2 + 17xy - 10xz + 12y^2 - 15yz$$

ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ?



### ಅಭ್ಯಾಸ - 11.3

1. ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ.

(i)  $2a-9$  and  $3a+4$

(ii)  $x-2y$  and  $2x-y$

(iii)  $kl+lm$  and  $k-l$

(iv)  $m^2-n^2$  and  $m+n$

2. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)  $(x+y)(2x-5y+3xy)$

(iii)  $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$

(ii)  $(mn-kl+km)(kl-lm)$

(iv)  $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$

3. ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ.

(i)  $(x-2y)(y-3x) + (x+y)(x-3y) - (y-3x)(4x-5y)$

(ii)  $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii)  $(a-2b+5c)(a-b) - (a-b-c)(2a+3c) + (6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv)  $(pq-qr+pr)(pq+qr) - (pr+pq)(p+q-r)$

4.  $a, b, c$  ಗಳು ಮೂರು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು  $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$ , ಆದರೆ  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$  ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 11.7 ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ (Identity) ಎಂದರೇನು ?

$$a(a-2) = a^2 - 2a$$
 ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲೂ,  $a$  ನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

$$a=5, \text{ ಬೆಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ } \text{LHS} = 5(5-2) = 5 \times 3 = 15$$

$$\text{RHS} = 5^2 - 2(5) = 25 - 10 = 15$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ  $a=5$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ  $\text{LHS} = \text{RHS}$

$$\text{ಹಾಗೆಯೇ } a = -2$$

$$\text{LHS} = (-2)(-2-2) = (-2) \times (-4) = 8$$

$$\text{RHS} = (-2)^2 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$$

ಆ ವಿಧವಾಗಿ  $a=-2$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸಹ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ  $\text{LHS} = \text{RHS}$  ಗೆ ಸಮ.

ಸಮೀಕರಣ  $a$  ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗಾದರೂ ವಾಸ್ತವ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ (identity) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$a(a+1) = 6$$
 ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣ  $a = 2$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ವಾಸ್ತವ ಆದರೆ ಇತರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ವಾಸ್ತವ ಅಲ್ಲ.

ಈ ತರಹ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಚರಾಕ್ಷರ ಬೇರೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸಂತ್ಯಷ್ಟಿ ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ  $a(a+1) = 6$  ಸಮೀಕರಣ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಅಲ್ಲ.

ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೂ ವಾಸ್ತವವಾದರೆ ಅದನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು,

ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ವಾಸ್ತವವಾದರೆ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯುವಾಗ LHS ಮತ್ತು RHS ಗಳ ನಡುವೆ ' $\equiv$ ' ಗುರುತನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದ್ದನ್ನು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

### 11.8 ಆದರ್ಶ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಗಾಗ್ಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಮೂರು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ. ಅವು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಇರುವವು ಎಂದರೆ ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬಹುದಾದವು

$(a + b)^2$  ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

ಈಗ, ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a(a + b) + b(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \quad (\text{ಏಕೆಂದರೆ } ab = ba) \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (I)$$

ಈಗ  $a=2$ ,  $b=3$ , ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ (LHS)  $= (a + b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

$$(RHS) = a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$$

LHS, RHS. ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. LHS ಮತ್ತು RHS ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮ.

ಕೆಲವು ಋಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು  $a, b$  ಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು I ಸರಿ ನೋಡಿರಿ



**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

$a, b, c$  ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳೋ ಅಲ್ಲವೋ ಸರಿ ನೋಡಿರಿ,

$$(i) \quad (a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$$(ii) \quad (a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(iii) \quad (a + b + c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

ಇನ್ನೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೋಡಿರಿ  $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$ ,

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$



**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಈಗ  $x = 2$ ,  $a = 1$  ಮತ್ತು  $b = 3$ , ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

- LHS = RHS ಆಗುವುದೇನೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
- $x, a$  ಮತ್ತು  $b$  ನ ಬೇರೆಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.
- $a, b$  ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ LHS = RHS ಆಗುತ್ತದೆಯೇ ?



- $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$
- (i)  $p$  ಬದಲಾಗಿ ' $q$ ' ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿರಿ. ಏನ್ನನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ?
- (ii)  $q$  ಬದಲಾಗಿ ' $p$ ' ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿರಿ. ಏನ್ನನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ?
- (iii) ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಯಾವುವು ?

### 11.9 ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದ ಅನ್ವಯ :

**ಉದಾಹರಣೆ 8:**  $(3x + 4y)^2$  ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $(3x + 4y)^2$ , ಎರಡು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ. ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪದಗಳು  $(3x + 4y)$  ಮತ್ತು  $(3x + 4y)$  ಸಮ ಪದಗಳು. ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಎರಡನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ವಿಸ್ತರಣೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ  $a = 3x$  ಮತ್ತು  $b = 4y$ . ಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ನಲ್ಲಿ, ಆದೇಶಿಸಿ ಸರಿ ನೋಡಬಹುದು.

$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ } (3x + 4y)^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2 \\ &= 9x^2 + 24xy + 16y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 3x \text{ ಮತ್ತು } b = 4y \text{ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ} \\ (a + b)^2 &\equiv a^2 + 2ab + b^2 \text{ ವಾಸ್ತವ} \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 9:**  $204^2$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} 204^2 &= (200 + 4)^2 \\ &= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2 \\ &= 40000 + 1600 + 16 \\ &= 41616 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 200 \text{ ಮತ್ತು } b = 4 \\ (a + b)^2 &\equiv a^2 + 2ab + b^2 \text{ ನಿತ್ಯ} \\ &\text{ಸಮೀಕರಣ} \end{aligned}$$



**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

(i)  $(5m + 7n)^2$  (ii)  $(6kl + 7mn)^2$  (iii)  $(5a^2 + 6b^2)^2$  (iv)  $302^2$

(v)  $807^2$  (vi)  $704^2$  ಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

(vii)  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು  $a = 3m$  ಮತ್ತು  $b = 5n$  ಆದಾಗ ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ 10:**  $(3m - 5n)^2$  ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ

**ಪರಿಹಾರ :**  $(3m - 5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$   
 $= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

$$\begin{aligned} a &= 3m \text{ ಮತ್ತು } b = 5n \text{ ಆದಾಗ} \\ (a - b)^2 &\equiv a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 11:  $196^2$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} 196^2 &= (200 - 4)^2 \\ &= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2 \\ &= 40000 - 1600 + 16 \\ &= 38416 \end{aligned}$$

$$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ

$a = 200, b = 4$  ಆದಾಗ



ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

(i)  $(9m - 2n)^2$  (ii)  $(6pq - 7rs)^2$  (iii)  $(5x^2 - 6y^2)^2$  ಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

(iv)  $292^2$  (v)  $897^2$  (vi)  $794^2$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 12:  $(4x + 5y)(4x - 5y)$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:  $(4x + 5y)(4x - 5y) = (4x)^2 - (5y)^2$   
 $= 16x^2 - 25y^2$

$$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$$

$a = 4x$  ಮತ್ತು  $b = 5y$  ಆದಾಗ

ಉದಾಹರಣೆ 13:  $407 \times 393$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:  $407 \times 393 = (400 + 7)(400 - 7)$   
 $= 400^2 - 7^2$   
 $= 160000 - 49$   
 $= 159951$

$$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$$

$a = 400, b = 7$  ಆದಾಗ

ಉದಾಹರಣೆ 14:  $987^2 - 13^2$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:  $987^2 - 13^2 = (987 + 13)(987 - 13)$   
 $= 1000 \times 974 = 974000$

$$a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$$

$a = 987, b = 13$  ಆದಾಗ



ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

(i)  $(6m + 7n)(6m - 7n)$  (ii)  $(5a + 10b)(5a - 10b)$

(iii)  $(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2)$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv)  $106 \times 94$  (v)  $592 \times 608$  (vi)  $92^2 - 8^2$  (vii)  $984^2 - 16^2$  ಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಿ

ಉದಾಹರಣೆ 15:  $302 \times 308$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :  $302 \times 308 = (300 + 2)(300 + 8)$   
 $= 300^2 + (2 + 8)(300) + (2)(8)$   
 $= 90000 + (10 \times 300) + 16$   
 $= 90000 + 3000 + 16 = 93016$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$$

$x = 300, a = 2, b = 8$  ಆದಾಗ

**ಉದಾಹರಣೆ 16:**  $93 \times 104$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**  $93 \times 104 = (100 + (-7))(100 + 4)$

$$\begin{aligned} 93 \times 104 &= (100 - 7)(100 + 4) \\ &= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4) \\ &= 10000 + (-3)(100) + (-28) \\ &= 10000 - 300 - 28 \\ &= 10000 - 328 = 9672 \end{aligned}$$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$x = 100, a = -7, b = 4 \text{ ಆದಾಗ}$$

ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ ?

ನೇರವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೇ ?



### ಅಭ್ಯಾಸ - 11.4

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಸೂಚಿಸಿ, ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)  $(3k + 4l)(3k + 4l)$

(ii)  $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$

(iii)  $(7d - 9e)(7d - 9e)$

(iv)  $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$

(v)  $(3t + 9s)(3t - 9s)$

(vi)  $(kl - mn)(kl + mn)$

(vii)  $(6x + 5)(6x + 6)$

(viii)  $(2b - a)(2b + c)$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ / ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)  $304^2$

(ii)  $509^2$

(iii)  $992^2$

(iv)  $799^2$

(v)  $304 \times 296$

(vi)  $83 \times 77$

(vii)  $109 \times 108$

(viii)  $204 \times 206$

### 11.10 ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸರಿನೋಡುವುದು

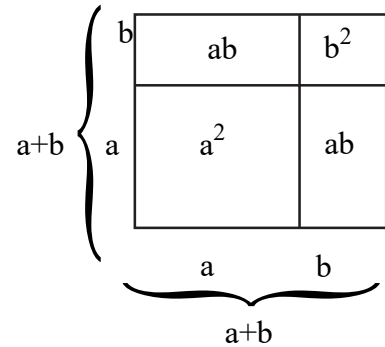
#### 11.10.1 ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕ/ವರ್ಗವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2 :$$

$(a + b)$  ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$$\text{ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \text{ಬಾಹುವಿನ ವರ್ಗ} = (\text{ಬಾಹು})^2 = (a + b)^2$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳು 'a', 'b' ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಎರಡು ಚೌಕಗಳು, ಉದ್ದ 'a', ಅಗಲ 'b' ಯಾಗಿರುವ ಎರಡು ಆಯತಗಳು ಇವೆ.



ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, 4 ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಕೊಟ್ಟ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಬಾಹು  $a$  ಉದ್ದವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  $a, b$  ಗಳು ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +  $a, b$  ಗಳು ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ' $b$ ' ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ  $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

**ಉದಾಹರಣೆ 17:**  $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$  ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು

ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ  $a = 3, b = 2$  ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಮೋಡಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)$  ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಅಂದರೆ  $3 + 2$

ಇರುವ ಹಾಗೆ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$$\text{L.H.S.} = (3 + 2)^2 = 5^2 = 25$$

R.H.S. = 3 ಯೂನಿಟ್ ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +

2 ಯೂನಿಟ್ ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +

3 ಯೂನಿಟ್ ಉದ್ದ, 2 ಯೂನಿಟ್ ಅಗಲವಾಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ +

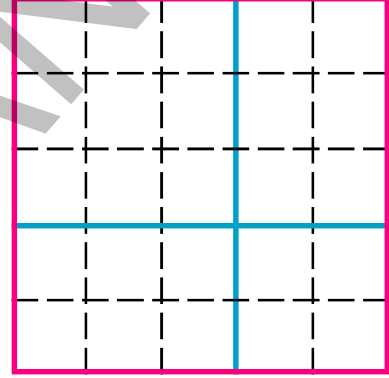
2 ಯೂನಿಟ್ ಉದ್ದ 3 ಯೂನಿಟ್ ಅಗಲವಾಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= 3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$$

$$= 9 + 4 + 6 + 6 = 25$$

L.H.S. = R.H.S.

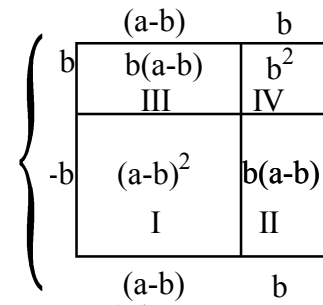
$\therefore$  ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಸರಿಮೋಡಿದೆ.



**11.10.2**  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸುವುದು.

' $a$ ' ಬಾಹುವಾಗಿ ಅಳತೆ ಇರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೋ

- ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಬಾ  $\times$  ಬಾ =  $a^2$
- ಈ ಚೌಕವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.
- ಇದು  $a - b, b$  ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ಚೌಕಗಳು: ' $a - b$ ', ' $b$ ' ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ಆಯತಗಳು ಇವೆ.



$$\begin{array}{c} \leftarrow a \rightarrow \\ a - b + b = a \end{array}$$

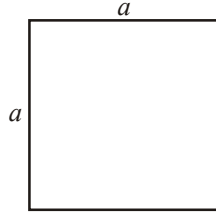
ಈಗ I ನೆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಂಪೂರ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 'a') -

ಪ್ರದೇಶ II ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಪ್ರದೇಶ III ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಪ್ರದೇಶ IV ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

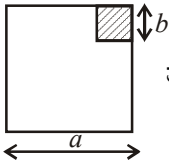
$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \\ &= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

**11.10.3**  $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$  ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಸರಿನೋಡುವುದು.

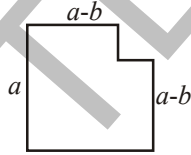
$a^2 - b^2 =$  ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 'a' ಯಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಬಾಹು ಉದ್ದ 'b' ಯಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಪಕ್ಕದ ಚೌಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.



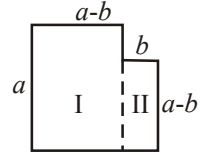
ಮೇಲಿನ ಚೌಕದ ಒಂದು ಕೊನೆಯಿಂದ b ಯುನಿಟ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿರಿ ( $b < a$ )



ತೆಗೆದು ಹಾಕಿದರೆ



ಇದು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ



ಆದ್ದರಿಂದ  $a^2 - b^2 =$  I ನೆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + II ನೆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= a(a-b) + b(a-b)$$

$$= (a-b)(a+b)$$

ಆದುದರಿಂದ  $a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b)$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 11.5

1.  $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$  ನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ a, b ಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

(i)  $a = 2$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು,  $b = 4$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

(ii)  $a = 3$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು,  $b = 1$  ಯೂನಿಟ್

(iii)  $a = 5$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು,  $b = 2$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

2.  $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$  ನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ  $a, b$  ಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.
- (i)  $a = 3$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು,  $b = 1$  ಯೂನಿಟ್
- (ii)  $a = 5$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು,  $b = 2$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು
3.  $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$  ನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ  $a, b$  ಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.
- (i)  $a = 3$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು,  $b = 2$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು
- (ii)  $a = 2$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು,  $b = 1$  ಯೂನಿಟ್



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡ ಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದು ಎಷ್ಟೋ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾ: ಬಾಹುಗಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು.
- ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿ ಬರುತ್ತದೆ.
- ಒಂದು ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿ ಪದದಿಂದ ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕು.
- ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಗುಣಿಸುವಾಗ ಪದನಂತರ ಪದ (ಆಂದರೆ ದ್ವಿ ಅಥವಾ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿ ಪದದಿಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕು) ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿನ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಜಾತಿ ಪದಗಳಿರಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು.
- ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಮಾನತೆ. ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮಾನತ್ವ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ವಾಸ್ತವವಾದಾಗ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಅಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದೆಡೆ ಸಮೀಕರಣ ಕೇವಲ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ವಾಸ್ತವವಾದರೆ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ವಾಸ್ತವ ಅಗುತ್ತವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಅಲ್ಲ.
- ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು:
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
  - $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ, ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗ ಪಡುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಸುಲಭವಾದ ಪದ್ಧತಿಗಳ ಮೂಲಕ ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಉಪಯೋಗ ಪಡುತ್ತವೆ.

## ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

### 12.0 ಪರಿಚಯ

42 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ '42' ನ್ನು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$$\begin{aligned} 42 &= 1 \times 42 \\ &= 2 \times 21 \\ &= 3 \times 14 \\ &= 6 \times 7 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 ಮತ್ತು 42 ಗಳು 42ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು, 42 ರ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು?

42 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೇ? ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ರಫೀ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ

$$\begin{aligned} 42 &= 2 \times 21 \\ &= 2 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

ಶಿರೀಷ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದಾ

$$\begin{aligned} 42 &= 3 \times 14 \\ &= 2 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

ಆಕ್ಬರ್ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ

$$\begin{aligned} 42 &= 6 \times 7 \\ &= 2 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?  $2 \times 3 \times 7$  ಮೂರು ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಂದ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬಂದಿದೆ.

ಈಗ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ '70' ನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 ಮತ್ತು 70 ಗಳು 70ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

70 ನ್ನು  $2 \times 5 \times 7$  ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನೆಲ್ಲವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು **ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಪದ್ಧತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$\begin{aligned} 70 &= 1 \times 70 \\ &= 2 \times 35 \\ &= 5 \times 14 \\ &= 7 \times 10 \end{aligned}$$



**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

- (i) 48                      (ii) 72                      (ii) 96

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ಬರೆದ ವಿಧದಲ್ಲಿಯೇ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಹ ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

### 12.1 ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

$$\begin{aligned} 7yz &= 7(yz) && (7 \text{ ಮತ್ತು } yz \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}) \\ &= 7y(z) && (7y \text{ ಮತ್ತು } z \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}) \\ &= 7z(y) && (7z \text{ ಮತ್ತು } y \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}) \\ &= 7 \times y \times z && (7, y \text{ ಮತ್ತು } z \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}) \end{aligned}$$

ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.  $7, y, z$  ಗಳು  $7yz$  ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಇದರಲ್ಲಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂಬ ಪದ 'irreducible' ಬದಲಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರಿಂದ  $7 \times y \times z$  ಎನ್ನುವುದು  $7yz$  ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ರೂಪವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.  $7 \times (yz)$  ಅಥವಾ  $7y(z)$  ಅಥವಾ  $7z(y)$  ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ರೂಪಗಳಲ್ಲ.

$7yz = 1 \times 7 \times y \times z$  ಆದ್ದರಿಂದ  $1, 7yz$  ಗೆ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ. '1' ಪ್ರತಿಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಪವರ್ತನ ಅದರಿಂದ ಅವಸರವಾದಾಗ ಮಾತ್ರವೇ '1' ನ್ನು ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

$7y(z+3)$  ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$7y(z+3) = 7 \times y \times (z+3)$  ಇಲ್ಲಿ  $7, y, (z+3)$  ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

ಅದೇವಿಧವಾಗಿ  $5x(y+2)(z+3) = 5 \times x \times (y+2) \times (z+3)$  ಇಲ್ಲಿ  $5, x, (y+2), (z+3)$  ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು.



#### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

- ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ
  - $8x^2yz$
  - $2xy(x+y)$
  - $3x+y^3z$

### 12.2 ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ ಅವಶ್ಯಕತೆ :

ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ ನಡೆದರೆ ಅದನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಪವರ್ತನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ಅಥವಾ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಬೀಜೋಕ್ತಿ  $23a + 23b + 23c$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$23(a+b+c)$ , ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ  $23$  ಮತ್ತು  $(a+b+c)$  ಗಳು ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಇದರಲ್ಲಿ  $23$  ಸಂಖ್ಯಾ ಅಪವರ್ತನ ಮತ್ತು  $(a+b+c)$  ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಅಪವರ್ತನ.

ಈಗ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ ಪದ್ಧತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ (i)  $x^2y + y^2x + xy$  (ii)  $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$ .

ಮೊದಲನೇ ಬೀಜೋಕ್ತಿ  $x^2y + y^2x + xy = xy(x+y+1)$  ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.



ಎರಡನೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿ  $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} &= \frac{(2x)^2 - (1)^2}{2x - 1} \\ &= \frac{(2x + 1)(2x - 1)}{(2x - 1)} \\ &= (2x + 1) \text{ ಆಗಿ ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಬಹುದು.} \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಲು. ಸೂಕ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ ಸಹಾಯ ಪಡುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

ಈಗ ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯೋಣ.

### 12.3 ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ :

$3x + 12$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡೋಣ.

ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದರೆ.

$$3x + 12 = (3 \times x) + (2 \times 2 \times 3) \text{ ಯಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ.}$$

ಎರಡರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಯಾವುವು?

3,3ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ

$$3 \times [x + (2 \times 2)] = 3 \times (x + 4) = 3(x + 4)$$

$3x + 12$  ಮತ್ತು  $3(x + 4)$  ಗಳು ಒಂದೇ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

3,  $(x + 4)$  ಗಳು  $3x + 12$  ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ನೀವು ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$6ab + 12b$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡೋಣ.

$$\begin{aligned} 6ab + 12b &= (2 \times 3 \times a \times b) + (2 \times 2 \times 3 \times b) \\ &= 2 \times 3 \times b \times (a + 2) = 6b(a + 2) \end{aligned}$$

$6ab, 12b$  ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.  $6b$

$$\therefore 6ab + 12b = 6b(a + 2)$$

ಉದಾಹರಣೆ: ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ (i)  $6xy + 9y^2$  (ii)  $25a^2b + 35ab^2$

ಪರಿಹಾರ: (i)  $6xy + 9y^2$

$$6xy = 2 \times 3 \times x \times y \text{ ಮತ್ತು } 9y^2 = 3 \times 3 \times y \times y$$

3 ಮತ್ತು 'y' ಎರಡು ಪದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ.

$$\begin{aligned}
& \text{ಆದ್ದರಿಂದ, } 6xy + 9y^2 \\
& = (2 \times 3 \times x \times y) + (3 \times 3 \times y \times y) \text{ (ಪದಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ)} \\
& = 3 \times y \times [(2 \times x) + (3 \times y)] \\
& \therefore 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } 25a^2b + 35ab^2 & = (5 \times 5 \times a \times a \times b) + (5 \times 7 \times a \times b \times b) \\
& = 5 \times a \times b \times [(5 \times a) + (7 \times b)] \\
& = 5ab(5a + 7b) \\
\therefore 25a^2b + 35ab^2 & = 5ab(5a + 7b)
\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2:**  $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$  ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

$$\begin{aligned}
3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 & = (3 \times x \times x) + (2 \times 3 \times x \times x \times y) + (3 \times 3 \times x \times y \times y) \\
& = 3 \times x [x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)] \\
& = 3x(x + 2xy + 3y^2) \quad (3 \times x \text{ ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ)} \\
\therefore 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 & = 3x(x + 2xy + 3y^2)
\end{aligned}$$



**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಅಪವರ್ತಿಸಿ (i)  $9a^2 - 6a$       (ii)  $15a^3b - 35ab^3$       (iii)  $7lm - 2lmn$

#### 12.4 ಗುಂಪು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ:

$ax + bx + ay + by$  ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳಲ್ಲಿ 'x' ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿವೆ, ಕೊನೆ ಎರಡು ಪದಗಳು 'y' ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಹೊಂದಿವೆ. ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು ಒಂದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ  $(ax + bx) + (ay + by)$  ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
(ax + bx) + (ay + by) & = x(a + b) + y(a + b) \text{ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. (ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ತೆಗೆದಾಗ)} \\
& = (a + b)(x + y) \quad (ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ)
\end{aligned}$$

$ax + bx + ay + by$  ನ್ನು  $(a + b)(x + y)$ , ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದು

$$\begin{aligned}
ax + ay + bx + by & = (ax + ay) + (bx + by) \\
& = a(x + y) + b(x + y) \\
& = (x + y)(a + b)
\end{aligned}$$



## ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಅಪವರ್ತಿಸಿ (i)  $5xy + 5x + 4y + 4$  (ii)  $3ab + 3b + 2b + 2$

ಉದಾಹರಣೆ 3:  $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ : ಹಂತ 1: ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇವೆಯೋ ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 2: ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ,

$$6ab - b^2 = b(6a - b) \quad \text{---I}$$

$$12ac - 2bc.$$

ಕೊನೆ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ

$$\text{ಆದು } 12ac - 2bc = 2c(6a - b) \quad \text{---II}$$

ಹಂತ 3: I, II ಹಂತಗಳನ್ನು ಎರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$$

$$= (6a - b)(b + 2c)$$

$$6ab - b^2 - 2bc + 12ac \text{ ಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳು } (6a - b) \text{ ಮತ್ತು } (b + 2c)$$

(6a - b) ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ



## ಅಭ್ಯಾಸ - 12.1

1. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)  $8x, 24$                       (ii)  $3a, 21ab$                       (iii)  $7xy, 35x^2y^3$                       (iv)  $4m^2, 6m^2, 8m^3$

(v)  $15p, 20qr, 25rp$                       (vi)  $4x^2, 6xy, 8y^2x$                       (vii)  $12x^2y, 18xy^2$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

(i)  $5x^2 - 25xy$                       (ii)  $9a^2 - 6ax$                       (iii)  $7p^2 + 49pq$

(iv)  $36a^2b - 60a^2bc$                       (v)  $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

(vi)  $4p^2 + 5pq - 6pq^2$                       (vii)  $ut + at^2$

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ:

(i)  $3ax - 6xy + 8by - 4bx$                       (ii)  $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

(iii)  $m^2 - mn + 4m - 4n$                       (iv)  $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$                       (v)  $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

### 12.5 ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಳಕೆಯಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &\equiv a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &\equiv a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)(a - b) &\equiv a^2 - b^2\end{aligned}$$

ಕೊಟ್ಟ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಮೇಲಿನ ಸರ್ವಸಮತೆ ಗುರ್ತಿಗೆ ಪದಗಳು ಬಲಗಡೆ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸ ಬಹುದು. ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 4:**  $x^2 + 10x + 25$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ, ಮೂರನೆ ಪದಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು ಆದು  $x^2$  ಮತ್ತು  $25 (5^2)$ , ಮಧ್ಯ ಪದ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು  $a^2 + 2ab + b^2$  ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧನೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಮಧ್ಯ ಪದದ ಗುರ್ತು ಧನಾತ್ಮಕ ಆದಾಗ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು..

$$x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ } a = x \text{ ಮತ್ತು } b = 5$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$$

**ಉದಾಹರಣೆ 5:**  $16z^2 - 48z + 36$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$16z^2 - 48z + 36 = (4 \times 4z^2) - (4 \times 12z) + (4 \times 9) = 4(4z^2 - 12z + 9)$$

$$4z^2 = (2z)^2 ; 9 = (3)^2 \text{ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು } 12z = 2(2z)(3)$$

$$\begin{aligned}4z^2 - 12z + 9 &= (2z)^2 - 2(2z)(3) + (3)^2 \quad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2] \\ &= (2z - 3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16z^2 - 48z + 36 &= 4(4z^2 - 12z + 9) = 4(2z - 3)^2 \text{ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ ಮತ್ತು} \\ &= 4(2z - 3)(2z - 3) \text{ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ}\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 6:**  $25p^2 - 49q^2$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ

**ಪರಿಹಾರ :** ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪದಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡನೆ ಪದ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದುದರಿಂದ  $a^2 - b^2$  ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು}$$

$$25p^2 - 49q^2 = (5p)^2 - (7q)^2$$

$$= (5p + 7q)(5p - 7q) [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } 25p^2 - 49q^2 = (5p + 7q)(5p - 7q)$$

**ಉದಾಹರಣೆ 7:**  $48a^2 - 243b^2$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಎರಡು ಪದಗಳು ಖಚಿತವಾದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು ಅಲ್ಲ. ಆದರೆ ಎರಡು ಪದಗಳಿಗೆ '3' ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇದೆ.

$$\begin{aligned} 48a^2 - 243b^2 &= 3 [16a^2 - 81b^2] \\ &= 3 [(4a)^2 - (9b)^2] \quad \text{ಮತ್ತು } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ &= 3 [(4a + 9b)(4a - 9b)] \\ &= 3 (4a + 9b)(4a - 9b) \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 8:**  $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳು  $(x+y)^2$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ನಾಲ್ಕನೇ ಪದ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಅದರಿಂದ  $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x+y)^2 - (2z)^2$

$$\begin{aligned} &= [(x+y) + 2z] [(x+y) - 2z] \\ &= (x+y+2z)(x+y-2z) \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

**ಉದಾಹರಣೆ 9:**  $p^4 - 256$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $p^4 = (p^2)^2$  ಮತ್ತು  $256 = (16)^2$

ಆದ್ದರಿಂದ  $p^4 - 256 = (p^2)^2 - (16)^2$

$$\begin{aligned} &= (p^2 - 16)(p^2 + 16) \\ &= (p+4)(p-4)(p^2 + 16) \end{aligned}$$

$$\text{ಮತ್ತು } p^2 - 16 = (p+4)(p-4)$$

## 12.6 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

$x^2 + 12x + 35, x^2 + 6x - 27, a^2 - 6a + 8, 3y^2 + 9y + 6, \dots$  ಮೊದಲಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕಿರುವ ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ಸ್ಥಿರ ಪದಗಳು ಸರಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.

$x^2 + 12x + 35$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಗುಂಪು ಮಾಡಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಪದವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ನಂತರ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ, ಆಗ ಆದು

$x^2 + (a+b)x + ab$  ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಸ್ಥಿರ ಪದವನ್ನು ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{array}{ll} 35 = 1 \times 35 & 1 + 35 = 36 \\ (-1) \times (-35) & -1 - 35 = -36 \\ 5 \times 7 & 5 + 7 = 12 \\ (-5) \times (-7) & -5 - 7 = -12 \end{array}$$

ಅ ಎರಡು ಪದಗಳ (ಜೋಡಿ) ಮೊತ್ತ ಮಧ್ಯ ಪದ ಸಹ ಗುಣಕ ಅಗುತ್ತದೆಯೇ? ಅದು ಖಚಿತವಾಗಿ  $5 + 7 = 12$

$$\begin{aligned}
\therefore x^2 + 12x + 35 &= x^2 + (5+7)x + 35 \\
&= x^2 + 5x + 7x + 35 \quad (\because 12x = 5x + 7x) \\
&= x(x+5) + 7(x+5) \quad (\text{ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದಾಗ}) \\
&= (x+5)(x+7) \quad ((x+5) \text{ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಹೊರತೆಗೆದಾಗ})
\end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಅನುಸರಿಸಿ of  $x^2 + (a+b)x + ab$  ಯನ್ನು  $(x+a)(x+b)$  ಯಾಗಿ ಬರೆಯ ಬಹುದೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ 10:**  $m^2 - 4m - 21$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $m^2 - 4m - 21$  ನ್ನು  $x^2 + (a+b)x + ab$  ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$$ab = -21, \text{ ಮತ್ತು } a+b = -4. \text{ ಆದ್ದರಿಂದ, } (-7) + 3 = -4 \text{ ಮತ್ತು } (-7)(3) = -21$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$$

$$= m(m-7) + 3(m-7)$$

$$= (m-7)(m+3)$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } m^2 - 4m - 21 = (m-7)(m+3)$$

-21 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಮೊತ್ತ	
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$-7 \times 3 = -21$	$-7 + 3 = -4$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

**ಉದಾಹರಣೆ 11:**  $4x^2 + 20x - 96$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 4 ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

$$4x^2 + 20x - 96 = 4[x^2 + 5x - 24]$$

$$x^2 + 5x - 24 \text{ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ}$$

$$= x^2 + 8x - 3x - 24$$

$$= x(x+8) - 3(x+8)$$

$$= (x+8)(x-3)$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } 4x^2 + 20x - 96 = 4(x+8)(x-3)$$

-24 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಮೊತ್ತ	
$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$-3 \times 8 = -24$	$-3 + 8 = 5$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 12.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

(i)  $a^2 + 10a + 25$

(ii)  $l^2 - 16l + 64$

(iii)  $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv)  $25x^2 + 9y^2 - 30xy$

(v)  $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi)  $81x^2 - 198xy + 121y^2$

(vii)  $(x+y)^2 - 4xy$

(ಸೂಚನೆ: ಮೊದಲು  $(x+y)^2$  ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.)

(viii)  $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

$$(i) x^2 - 36$$

$$(ii) 49x^2 - 25y^2$$

$$(iii) m^2 - 121$$

$$(iv) 81 - 64x^2$$

$$(v) x^2y^2 - 64$$

$$(vi) 6x^2 - 54$$

$$(vii) x^2 - 81$$

$$(viii) 2x - 32x^5$$

$$(ix) 81x^4 - 121x^2$$

$$(x) (p^2 - 2pq + q^2) - r^2$$

$$(xi) (x + y)^2 - (x - y)^2$$

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

$$(i) lx^2 + mx$$

$$(ii) 7y^2 + 35Z^2$$

$$(iii) 3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$$

$$(iv) x^2 - ax - bx + ab$$

$$(v) 3ax - 6ay - 8by + 4bx$$

$$(vi) mn + m + n + 1$$

$$(vii) 6ab - b^2 + 12ac - 2bc$$

$$(viii) p^2q - pr^2 - pq + r^2$$

$$(ix) x(y+z) - 5(y+z)$$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ.

$$(i) x^4 - y^4$$

$$(ii) a^4 - (b+c)^4$$

$$(iii) l^2 - (m-n)^2$$

$$(iv) 49x^2 - \frac{16}{25}$$

$$(v) x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

$$(vi) 4(a+b)^2 - 9(a-b)^2$$

5. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

$$(i) a^2 + 10a + 24$$

$$(ii) x^2 + 9x + 18$$

$$(iii) p^2 - 10q + 21$$

$$(iv) x^2 - 4x - 32$$

6. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಆಳತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಆದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಸಹ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ. ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 21 ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ 48 ಅದರ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7.  $x^2 + 3xy + x + my - m$  ನ್ನು  $x, y$  ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರೆದು 'm' ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $x, y$  ಪದಗಳ ಸಹ ಗುಣಕಗಳ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು)

## 12.7 ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಭಾಗಾಕಾರ

ಭಾಗಾಕಾರ, ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು

$$3x \times 5x^3 = 15x^4 \text{ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.}$$

$$\text{ಅದರಿಂದ } 15x^4 \div 5x^3 = 3x \text{ ಮತ್ತು } 15x^4 \div 3x = 5x^3$$

$$6a(a+5) = (6a^2 + 30)$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } (6a^2 + 30) \div 6a = a + 5$$

$$\text{ಮತ್ತು } (6a^2 + 30) \div (a+5) = 6a.$$

## 12.8 ಏಕಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು

$$24x^3 \div 3x \text{ ನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.}$$

$$\therefore 24x^3 \div 3x$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x}{3 \times x}$$

$$= \frac{(3 \times x)(2 \times 2 \times 2 \times x \times x)}{(3 \times x)} = 8x^2$$

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ

$$(i) 70x^4 \div 14x^2 \quad (ii) 4x^3y^3z^3 \div 12xyz$$

$$\text{ಪರಿಹಾರ :} \quad (i) 70x^4 \div 14x^2 = \frac{2 \times 5 \times 7 \times x \times x \times x \times x}{2 \times 7 \times x \times x}$$

$$= \frac{5 \times x \times x}{1}$$

$$= 5x^2$$

$$(ii) 4x^3y^3z^3 \div 12xyz = \frac{4 \times x \times x \times x \times y \times y \times y \times z \times z \times z}{12 \times x \times y \times z}$$

$$= \frac{1}{3}x^2y^2z^2$$

### 12.9 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು:

ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$6x^4 + 10x^3 + 8x^2$  ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ  $2x^2$  ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$6x^4 + 10x^3 + 8x^2 = [2 \times 3 \times x \times x \times x \times x] + [2 \times 5 \times x \times x \times x] + [2 \times 2 \times 2 \times x \times x]$$

$$= \frac{(2x^2)(3x^2)}{(2x^2)} + \frac{(2x^2)(5x)}{(2x^2)} + \frac{2x^2(4)}{(2x^2)}$$

$$= 2x^2 [3x^2 + 5x + 4]$$

$2x^2$  ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ

ಈ ಪ್ರಕಾರ  $(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$$= \frac{6x^4 + 10x^3 + 8x^2}{2x^2} = \frac{2x^2(3x^2 + 5x + 4)}{2x^2}$$

$$= (3x^2 + 5x + 4)$$

ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದು ಹಾಕೋಣ.

$$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$$

$$= \frac{6x^4}{2x^2} + \frac{10x^3}{2x^2} + \frac{8x^2}{2x^2}$$

$$= 3x^2 + 5x + 4$$

ಇಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ



ಉದಾಹರಣೆ 13:  $30(a^2bc + ab^2c + abc^2)$  ನ್ನು  $6abc$  ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ :  $30(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$$= 2 \times 3 \times 5 [(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$$

$$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c (a + b + c)$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ  $30(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{2 \times 3 \times 5 \times abc(a + b + c)}{2 \times 3 \times abc}$$

$$= 5(a + b + c)$$

ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ  $30(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc} + \frac{30ab^2c}{6abc} + \frac{30abc^2}{6abc}$$

$$= 5a + 5b + 5c$$

$$= 5(a + b + c)$$

12.10 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು.

$(3a^2 + 21a) \div (a+7)$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಮೊದಲು  $3a^2 + 21a$  ನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಮಾಡೋಣ.

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2 + 21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a(a+7)}{a+7} = 3a$$

$$= 3a$$

ಉದಾಹರಣೆ 14:  $39y^3(50y^2 - 98)$  by  $26y^2(5y+7)$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ :  $39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2(25y^2 - 49)]$

$$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2 - (7)^2] \quad \boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

$$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)(5y - 7)]$$

$$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y + 7)(5y - 7)$$

ಆದೇ ವಿಧವಾಗಿ  $26y^2(5y + 7) = 2 \times 13 \times y \times y \times (5y + 7)$

$$\begin{aligned}
&\therefore [39y^3(50y^2 - 98)] \div [26y^2(5y + 7)] \\
&= \frac{[2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y(5y + 7)(5y - 7)]}{[2 \times 13 \times y \times y \times (5y + 7)]} \\
&= 3y(5y - 7)
\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 15:**  $m^2 - 14m - 32$  ನ್ನು  $m+2$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$\begin{aligned}
\text{ಪರಿಹಾರ : } \quad m^2 - 14m - 32 &= m^2 - 16m + 2m - 32 \\
&= m(m - 16) + 2(m - 16) \\
&= (m - 16)(m + 2) \\
(m^2 - 14m - 32) \div m + 2 &= (m - 16)(m + 2) \div (m + 2) \\
&= (m - 16)
\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 16:**  $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2)$  ನ್ನು  $7a(a - 4)$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$\begin{aligned}
\text{ಪರಿಹಾರ : } \quad 42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) &= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 13a + 36) \\
&= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 9a - 4a + 36) \\
&= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [a(a - 9) - 4(a - 9)] \\
&= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [(a - 9)(a - 4)] \\
&= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \\
42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \div 7a(a - 4) &= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \div 7a(a - 4) \\
&= 6a(a - 9)
\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 17:**  $x(3x^2 - 108)$  ನ್ನು  $3x(x - 6)$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$\begin{aligned}
\text{ಪರಿಹಾರ : } \quad x(3x^2 - 108) &= x \times [3(x^2 - 36)] \\
&= x \times [3(x^2 - 6^2)] \\
&= x \times [3(x + 6)(x - 6)] \\
&= 3 \times x \times [(x + 6)(x - 6)] \\
x(3x^2 - 108) \div 3x(x - 6) &= 3 \times x \times [(x + 6)(x - 6)] \div 3x(x - 6) \\
&= (x + 6)
\end{aligned}$$



## ಅಭ್ಯಾಸ - 12.3

- ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ.
  - $48a^3$  by  $6a$
  - $14x^3$  by  $42x^2$
  - $72a^3b^4c^5$  by  $8ab^2c^3$
  - $11xy^2z^3$  by  $55xyz$
  - $-54l^4m^3n^2$  by  $9l^2m^2n^2$
- ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.
  - $(3x^2 - 2x) \div x$
  - $(5a^3b - 7ab^3) \div ab$
  - $(25x^5 - 15x^4) \div 5x^3$
  - $(4l^5 - 6l^4 + 8l^3) \div 2l^2$
  - $15(a^3b^2c^2 - a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3) \div 3abc$
  - $(3p^3 - 9p^2q - 6pq^2) \div (-3p)$
  - $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2 + \frac{4}{3}ab^2c^2) \div \frac{1}{2}abc$
- ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ.
  - $(49x - 63) \div 7$
  - $12x(8x - 20) \div 4(2x - 5)$
  - $11a^3b^3(7c - 35) \div 3a^2b^2(c - 5)$
  - $54lmn(l + m)(m + n)(n + l) \div 8lmn(l + m)(n + l)$
  - $36(x + 4)(x^2 + 7x + 10) \div 9(x + 4)$
  - $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) \div a(a + 3)$
- ಸೂಚಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ
  - $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$
  - $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 6)$
  - $(p^2 + 5p + 4) \div (p + 1)$
  - $15ab(a^2 - 7a + 10) \div 3b(a - 2)$
  - $15lm(2p^2 - 2q^2) \div 3l(p + q)$
  - $26z^3(32z^2 - 18) \div 13z^2(4z - 3)$

## ಆಲೋಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸಿ.



ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿರುವ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದರು. ಅವರು ಮಾಡಿದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸರಿಯಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

- ಶ್ರೀ ಲೇಖ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ

$$3x + 4x + x + 2x = 90$$

$$9x = 90 \quad \text{ಆದ್ದರಿಂದ } x = 10$$

ಈ ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಾ?

ಶ್ರೀ ಲೇಖ ಎಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೀರಾ?

2. ಅಬ್ರಾಹಂ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ

$$x = -4, 7x = 7 - 4 = -3$$

3. ಜಾನ್ ಮತ್ತು ರೇಷ್ಮಾ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ಜಾನ್	ರೇಷ್ಮಾ
(i) $3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(ii) $(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(iii) $(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(iv) $(x+8)^2 = x^2 - 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$

4. ಹರ್ಮೀಟ್ ಒಂದು ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ  $(a+5) \div 5 = a+1$

ಶ್ರೀಕರ್ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ  $(a+5) \div 5 = a/5 + 1$

ಆವನ ಗೆಳತಿ ರೋಸಿ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ  $(a+5) \div 5 = a$

ಮೇಲಿನವರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೋ ತಿಳಿಸಬಲ್ಲರಾ ?



### ಅಭ್ಯಾಸ - 12.4

ಈ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಕೃತಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

(i)  $3(x-9) = 3x - 9$

(ii)  $x(3x+2) = 3x^2 + 2$

(iii)  $2x + 3x = 5x^2$

(iv)  $2x + x + 3x = sx$

(v)  $4p + 3p + 2p + p - 9p = 0$

(vi)  $3x+2y = 6xy$

(vii)  $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii)  $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix)  $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x)  $x = -3$  ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

(a)  $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b)  $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c)  $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = -9 - 15 = -24$

(xi)  $(x - 4)^2 = x^2 - 16$

(xii)  $(x + 7)^2 = x^2 + 49$

(xiii)  $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 - 4a^2$

(xiv)  $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 8$

(xv)  $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 8$

(xvi)  $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii)  $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$

(xviii)  $3x + 2 \div 3x = \frac{2}{3x}$

(xix)  $3x + 5 \div 3 = 5$

(xx)  $\frac{4x + 3}{3} = x + 1$



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
2. ಸೂಕ್ತೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.
3.  $a^2 + 2ab + b^2$ ;  $a^2 - 2ab + b^2$ ;  $a^2 - b^2$  ಮತ್ತು  $x^2 + (a + b)x + ab$  ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು.
4.  $x^2 + (a + b)x + ab$ , ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು  $(x + a)(x + b)$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.
5. ಭಾಗಾಕಾರ, ಗುಣಾಕಾರದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಕ್ರಿಯೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಗೂ ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

### ಗೋಲ್ಡ್ ಬಾಕ್ ಉಹೆ :

ಗೋಲ್ಡ್ ಬಾಕ್ ತನ್ನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ “ ಪ್ರತಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಯಾಗಿ ರುತ್ತದೆ” ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿದ್ದಾನೆ.

$$21 = 19 + 2 \text{ ಅಥವಾ } 13 + 8 \text{ ಅಥವಾ } 3 + 18.$$

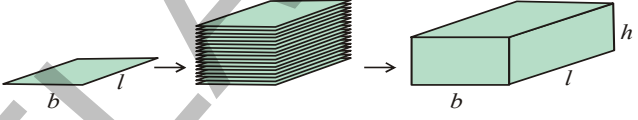
ಅವನು ಮೇಲಿನ ವಿಧವಾಗಿ 9000, ಸಂಖ್ಯೆವರೆಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$5777 = 53 \times 109 \text{ ಮತ್ತು } 5993 = 13 \times 461 \text{ ಮಾತ್ರವೇ ವಿನಾಯಿತಿ ಇದೆ. ಅವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಲ್ಲ ಅಥವಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.}$$

## ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡುವುದು

### 13.02 ಪೀಠಿಕೆ :

ನಾವು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ವಸ್ತುಗಳಿರುವ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿರುವ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ವಸ್ತುಗಳು ಮೂರು ಆಯಾಮದ (3-D) ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ನಾವು ಎರಡು ಆಯಾಮದ (2-D) ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸುವುದರಿಂದ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು. ಗೋಡೆಮೇಲಿರುವ ಭಿತ್ತಿ ಪತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮೇಲ್ಮುಖವು ಆಯತಾಕಾರವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಅಳತೆಗಳಿವೆ? ಇದಕ್ಕೆ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಎಂಬ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳಿವೆ. ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಪುಸ್ತಕ ಯಾವ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ? ಅದು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳಿವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆ ಇದೆ. ಅದೇ ಎತ್ತರ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ, ಚೌಕ, ಆಯತಗಳು, ದ್ವಿಮಿತಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮತಲೀಯ ಚಿತ್ರಗಳು, ಆದರೆ ಘನ, ಆಯತಘನಗಳು ತ್ರಿಮಿತಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಘನ ವಸ್ತುಗಳು. ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಅದು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ವಲ್ಪವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತ ಒಂದು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕಾರದ ವಸ್ತು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಘನ ಪಲ ಸಹ ಇರುತ್ತದೆ.

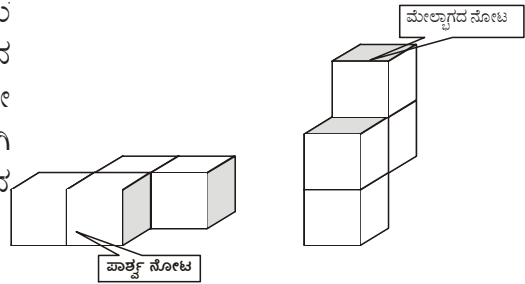


#### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

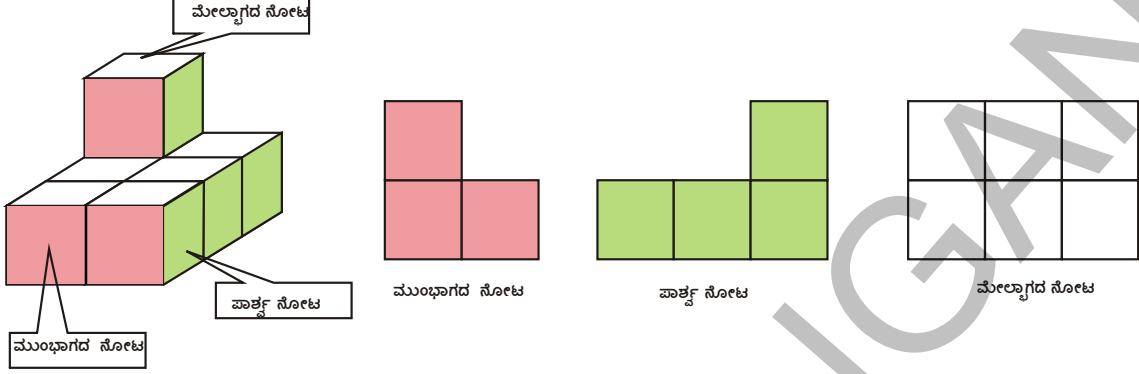
1. ಕೆಲವು ತ್ರಿಮಿತಿ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.
2. ಕೆಲವು ದ್ವಿಮಿತಿ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.
3. ಗಾಳಿಪಟಾಕೃತಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಿರಿ. ಅದು ತ್ರಿಮಿತಿ ಆಕಾರವೇ ಅಥವಾ ದ್ವಿಮಿತಿ ಆಕಾರವೇ ಗುರುತಿಸಿರಿ.
4. ಘನ ಮತ್ತು ಆಯತಘನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.
5. ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ಗೋಳಗಲೂ ಎಷ್ಟು ಅಳತೆಗಳು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ?

### 13.1 ಘನಗಳಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳು :

ಕೆಲವು ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಈ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳು 1 ಮೂಲಮಾನದ ಅಳತೆ ಇರುವ 4 ಘನಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ನೋಡಲು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಸ್ತುಗಳಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತಿವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾನಗಳಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.



ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳಿಂದ ವಿವಿಧ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ



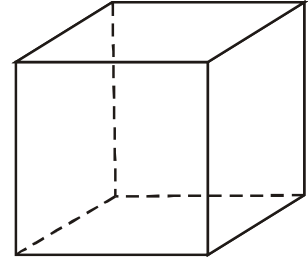
### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ..



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ, ಕೆಳಭಾಗದಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಕಾಣಿಸುವ ಆಕಾರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು.

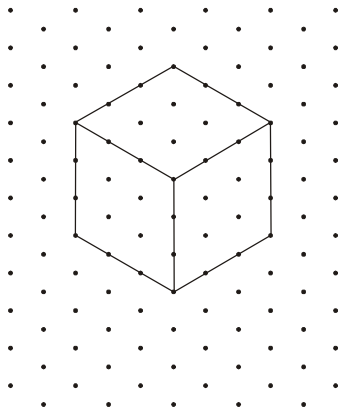
### 13.2. ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು.

ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ವಸ್ತುಗಳ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಅವು ಎಳೆಯುವಾಗ ಕೇವಲ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ತೋರಿಸಬಲ್ಲೆವು. ಮೂರನೇ ಅಳತೆ ನಮಗೆ ಊಹಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ. ನಾವು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರುವ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು ಇರುವಂತೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತಿವೆ. ಆದರೆ ಅಳತೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಸಮಾನವಾಗಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.



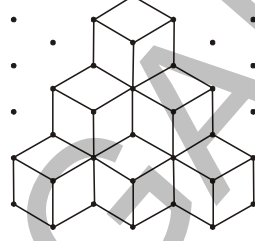
ಈ ರಕವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ನಾವು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಚುಕ್ಕೆ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಖಚಿತವಾದ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ಅಳೆಯಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಈ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಎಷ್ಟು ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



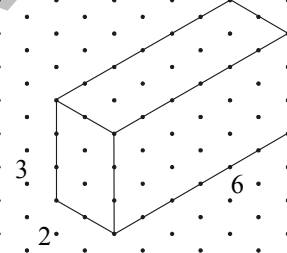
**ಪರಿಹಾರ :** ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂರು ವರಸೆಗಳಲ್ಲಿ ಘನಗಳು ಇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಪದರದಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಘನ ಇದೆ. ಎರಡನೇ ಪದರದಲ್ಲಿ 3 ಘನಗಳಿವೆ. (1 ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲ) ಕೆಳಗಿನ ಪದರದಲ್ಲಿ 6 ಘನಗಳಿವೆ. (3 ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲ) ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಘನಗಳು =  $1 + 3 + 6 = 10$  ಘನಗಳು..

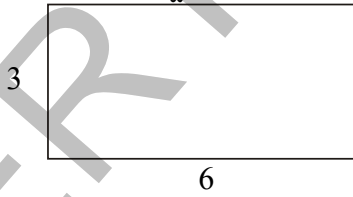


**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಆಯತ ಘನದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 1 ಯೂನಿಟ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ) ಮತ್ತು ಹಾಗೆಯೇ ಪಾರ್ಶ್ವನೋಟ, ಮುಂಭಾಗದ ನೋಟ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ ಭಾಗದ ನೋಟಗಳಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಬರುವ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

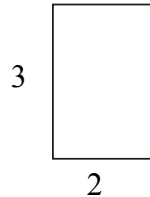
**ಪರಿಹಾರ :** ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ  $l = 6$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.  
ಆಯತ ಘನದ ಅಗಲ  $b = 2$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.  
ಆಯತ ಘನದ ಎತ್ತರ  $h = 3$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.



ಪಾರ್ಶ್ವದಿಂದ



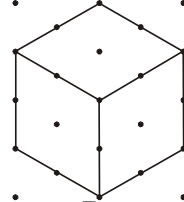
ಮುಂಭಾಗದ ದಿಂದ



ಮೇಲ್ಭಾಗದ ದಿಂದ

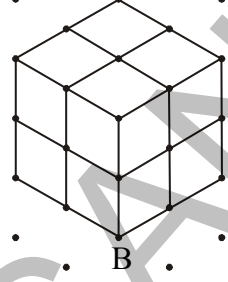


**ಉದಾಹರಣೆ 3 :** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ ಘನ A ಘನ B ಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಚದರ ಮಾನ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಘನಗಳಿವೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಸಹ ಬರೆಯಿರಿ.

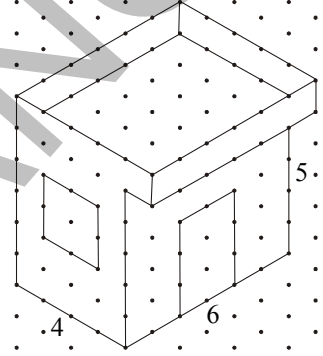




**ಪರಿಹಾರ :** ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಘನ A ನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ ಘನವಿದೆ. ಘನ B, ನಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅವು ಆ ಘನವನ್ನು 1 ಮೂಲಮಾನ ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಘನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಘನದಲ್ಲಿ 4, ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 4 ಒಟ್ಟು 8 ಘನಗಳಿವೆ ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತ 1 : 8.



**ಉದಾ 4 :** ಒಂದು ಮನೆಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚುಕ್ಕೆ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮನೆಯ ಉದ್ದ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮುಂದಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾದ ಮೇಲ್ಮಾಳಿಗೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

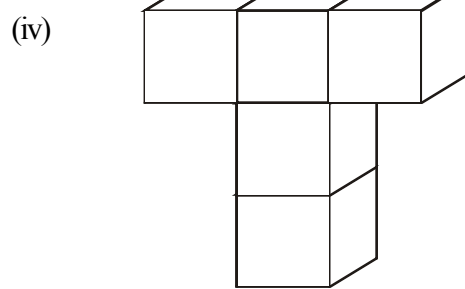
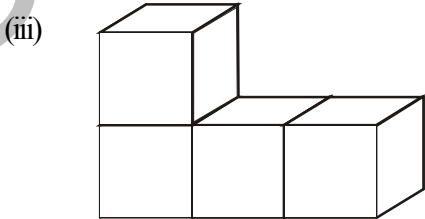
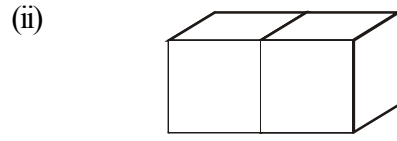
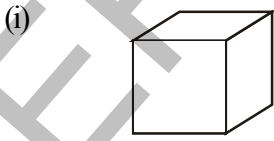


**ಪರಿಹಾರ :** ಮನೆಯ ಉದ್ದ = 6 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು  
 ಮನೆಯ ಅಗಲ = 4 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು  
 ಮನೆಯ ಎತ್ತರ = 5 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು  
 ಮೇಲ್ಮಾಳಿಗೆಯನ್ನು 1 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಮುಂದಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಲಾಗಿದೆ.  
 ಮೇಲ್ಮಾಳಿಗೆಯ ಅಳತೆಗಳು =  $5 \times 6$  ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು  
 ಮೇಲ್ಮಾಳಿಗೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $5 \times 6 = 30$  ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

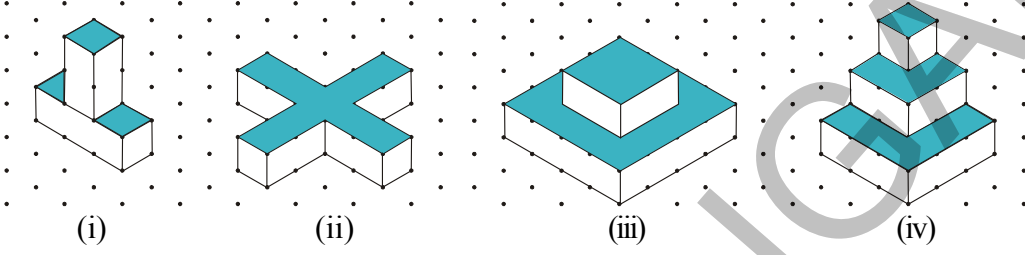


### ಅಭ್ಯಾಸ - 13.1

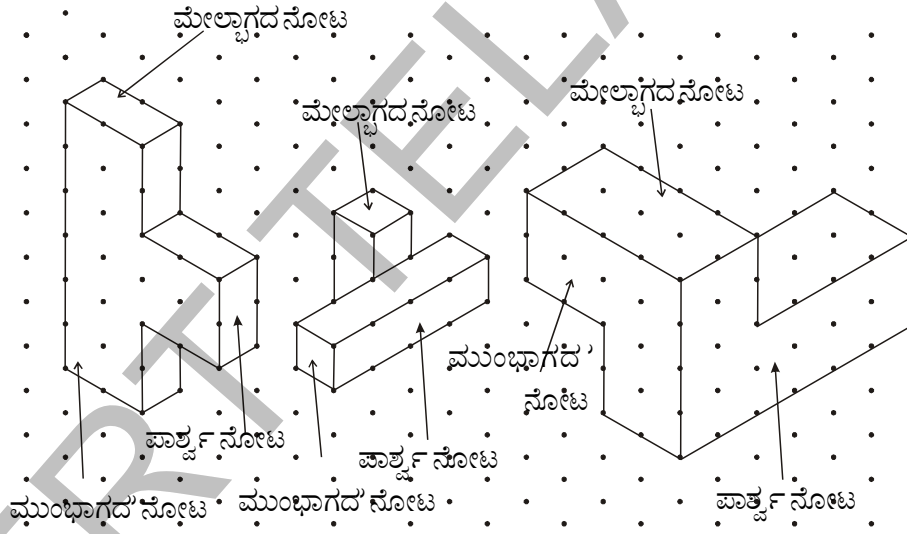
1. ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಮಿತಿ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳ ಚುಕ್ಕೆ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ (isometric dot sheet) ಚಿತ್ರಿಸಿರಿ.



2. 5 ಯೂನಿಟ್  $\times$  3 ಯೂನಿಟ್  $\times$  2 ಯೂನಿಟ್ ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಒಂದೆ ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳ ಚುಕ್ಕೆ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿರಿ.
3. ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಮಿತಿ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಯೂನಿಟ್ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ



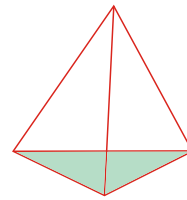
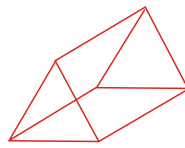
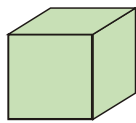
4. ಪ್ರಶ್ನೆ 3 ರಲ್ಲಿ ಶೇಡ್ ಮಾಡಿದ ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 1 ಸೆ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳ ಮುಂಭಾಗದ ನೋಟ, ಪಾರ್ಶ್ವ ನೋಟ, ಮತ್ತು ಮೇಲ್ ಭಾಗದ ನೋಟಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿರಿ.



### 13.3 ಅನೇಕ ವಿಧದ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಘನ ವಸ್ತುಗಳು.

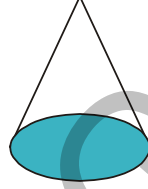
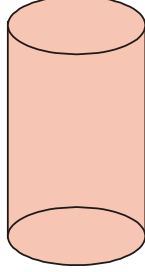
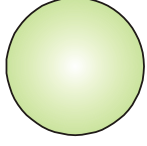
ನಾವು ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿರುವ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಘನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ವಕ್ರವಾಗಿರುವ ಮುಖ (curved) ಮತ್ತು ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ (flat) ಸಮತಟ್ಟಾದ ಮುಖಗಳಿವೆ. ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳಾದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ, ಪುಸ್ತಕ, ದಾಳಗಳಿಗೆ ಸಮತಟ್ಟಾದ ಮುಖಗಳಿವೆ. ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳಾದ ಚೆಂಡು, ಕೊಳವೆ (Iüpipe) ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಗೆ ವಕ್ರಮುಖಗಳಿವೆ. ಈ ಗುಣಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಾವು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲದವುಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು. .

ಈ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.



ಈ ಘನಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ವಕ್ರಮುಖಗಳವೆಯೇ? ಇಲ್ಲ,

ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮತಟ್ಟಾದ ಮುಖಗಳಿವೆ. ಇಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳೆನ್ನುವೆವು (ಒಂದನ್ನು ಬಹುಮುಖಘನಾಕೃತಿ) ಈಗ ಈ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುಗಳು ವಕ್ರಮುಖಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಇಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳೆನ್ನುವೆವು.

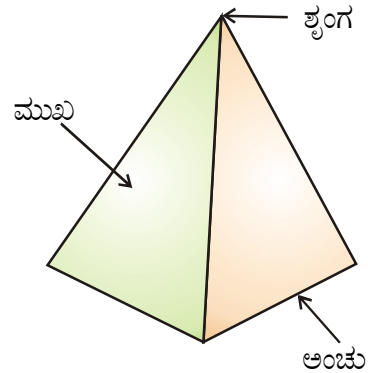
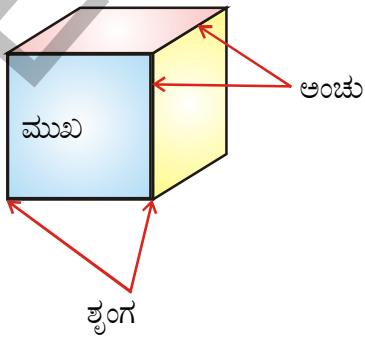


**ಇವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :**

1. ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.
2. ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲದವುಗಳಿಗೆ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

### 13.4 ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳ ವಸ್ತುಗಳ ಮುಖಗಳು, ಅಂಚುಗಳು ಮತ್ತು ಶೃಂಗಗಳು.

ನಾವು ವಾಸಿಸುವ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಗೋಡೆಗಳನ್ನು, ಕಿಟಕಿಗಳನ್ನು, ಬಾಗಿಲುಗಳನ್ನು, ಮನೆಯ ತಳವನ್ನು, ಮನೆಯ ಮಾಳಿಗೆಯನ್ನು, ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಟೇಬಲ್ ಗಳು, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮತಟ್ಟಾದ ಮುಖಗಳಿವೆ. ಈ ಮುಖಗಳು ಅಂಚುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಚುಗಳ ಮೂಲೆಗಳ ಹತ್ತಿರ ಸೇರುತ್ತಿವೆ. ಇಂತಹ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಘನವನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಗೊಪುರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಮುಖಗಳು ಎಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತವೆ? ಅಂಚುಗಳು ಎಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತವೆ.

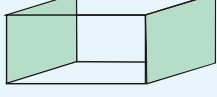




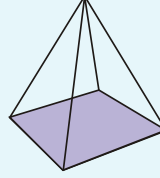
### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಈ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಮುಖಗಳು, ಅಂಚುಗಳು ಮತ್ತು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

1.



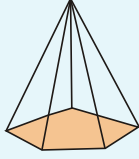
2.



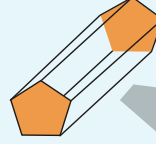
3.



4.

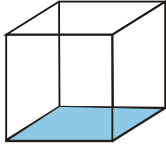


5.

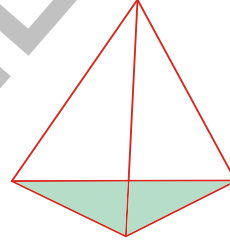


### 13.5 ನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳು

ಈ ಆಕಾರಗಳ ಮುಖಗಳು, ಅಂಚುಗಳು ಮತ್ತು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

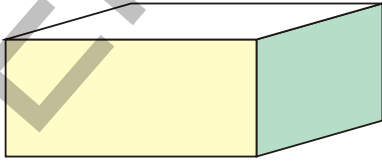


ಘನ

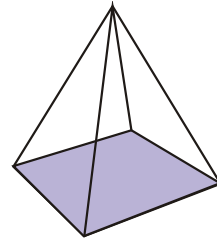


ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಪಿರಾಮಿಡ್ (ಚತುರ್ಮುಖ ಘನ)

ಮೇಲಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಂತಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಮುಖಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳು. ಅವುಗಳ ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮವಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಅವುಗಳ ಶೃಂಗಗಳು ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮುಖಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುತ್ತಿವೆ. ಇಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳೆನ್ನುವರು. ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.



ಅಯತ ಘನ



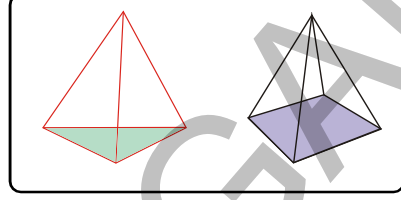
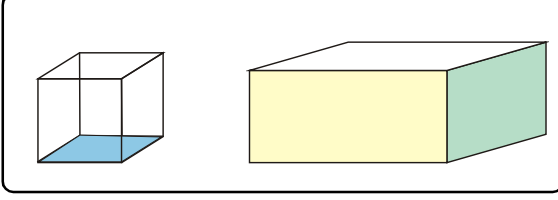
ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರ

ಅಯತ ಘನ ಒಂದು ಅನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮುಖಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಅಲ್ಲ ಮತ್ತು ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರೋಬಿಂದು 4 ಅಂಚುಗಳಿಂದ ಉಳಿದ ಶೃಂಗಗಳು 3-ಅಂಚುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಮೇಲಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಮುಖಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿಲ್ಲ. ಇದೂ ಸಹ ನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿ ಅಲ್ಲ. ಇಂತಹ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಅನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಾಗಿ ಹೆಸರಿಸುತ್ತಾರೆ.

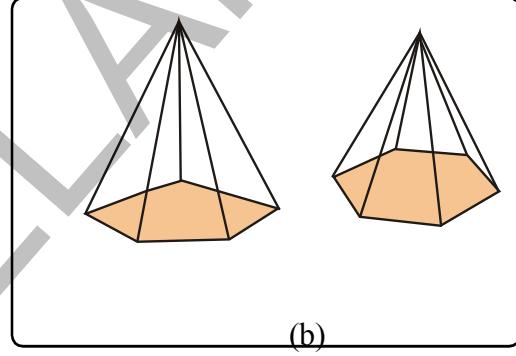
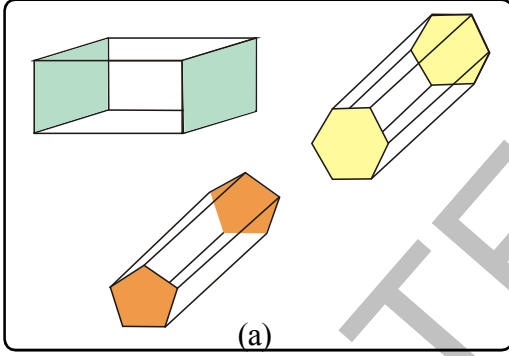
ಈ ಪ್ರಕಾರದಿಂದ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಎಂದು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು.

### 13.4.1 ಪಟ್ಟಕ ಮತ್ತು ಪಿರಮಿಡ್ (ಗೋಪುರಾಕೃತಿ)

ಕೆಳಗಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಮೊದಲನೇ ಪಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಮುಖಗಳು ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿವೆ. ಎರಡನೇ ಪಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಮುಖದ ಬದಲಾಗಿ ಪಾದ ಇದೆ. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಮುಖಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗವಿದೆ. ಇಂತಹ ಆಕಾರ ಇರುವ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ (a) ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಎದುರೆ ದುರಾಗಿ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಮುಖಗಳು ಸರ್ವ ಸಮವಾಗಿವೆ. ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳೆಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳು (ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು) ಚಿತ್ರ (b) ನಲ್ಲಿ ಪಾದ ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳೆಲ್ಲಾ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಸರ್ವ ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಪಾದಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಆಯತಾಕರವಾಗಿರುವ ಓರೆ ಮುಖಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ಘನಾ ಕೃತಿಯನ್ನು ಪಟ್ಟಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಪಾದ ಮತ್ತು ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏಕ ಬಿಂದು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಓರೆ ಮುಖಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಗೋಪುರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

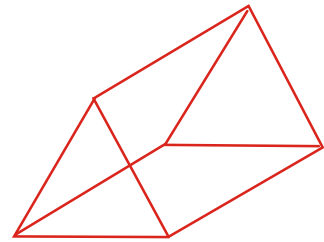
ಪಟ್ಟಕ ಅಥವಾ ಗೋಪುರದ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಪಾದದ ಆಕಾರದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸರ್ವ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎದುರೆ ದುರಾಗಿರುವ ಮುಖಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ.

#### A. ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕ

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಎರಡು ಸರ್ವ ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಮುಖಗಳ ಆಕಾರವೇನು?

ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳ ಆಕಾರಗಳೇನು?

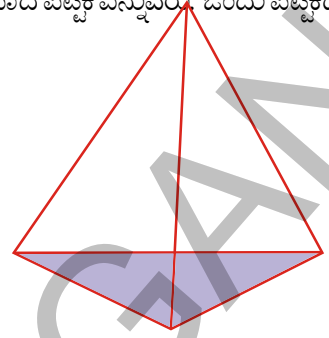
ಇದರ ಎರಡು ಸರ್ವ ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಮುಖಗಳು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರವಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ. ಇಂತಹ ಪಟ್ಟಕವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



ಒಂದು ಪಟ್ಟಕದ ಪಾದವು ಚೌಕಾಕಾರವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ವರ್ಗಪಾದ ಪಟ್ಟಕ ಅಥವಾ ಚೌಕಪಾದ ಪಟ್ಟಕ ಎನ್ನುವರು. ಒಂದು ಪಟ್ಟಕದ ಪಾದವು ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿಯಾದರೆ ಅದನ್ನು ಪಂಚಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

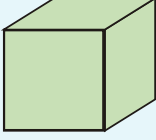
### B. ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರ

ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಪಾದವು ತ್ರಿಭುಜವಾದರೆ ಅದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರ ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು ಚತುರ್ಮುಖ ಘನವೆಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುವರು. (ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದರೆ ನಾಲ್ಕು ಮುಖಗಳು ಇರುವುದು) ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಪಾದವು ಚೌಕಾಕಾರವಾದರೆ ಅದನ್ನು ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರ (ಚೌಕಪಾದ ಗೋಪುರ) ಎನ್ನುವರು. ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಪಾದವು ಪಂಚಭುಜಾಕೃತಿ ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಪಂಚಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರ ಎನ್ನುವರು.

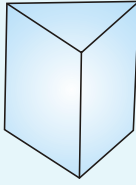


#### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

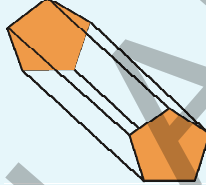
1. ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಕಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.:



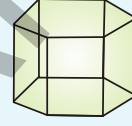
(i)



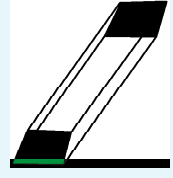
(ii)



(iii)

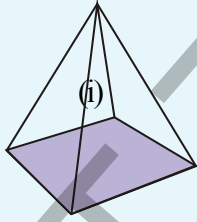


(iv)

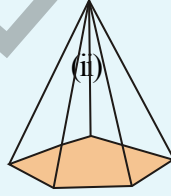


(v)

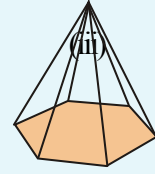
2. ಕೆಳಗಿನ ಗೋಪುರ (ಪಿರಮಿಡ್)ಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:



(i)



(ii)



(iii)

3. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಗೋಪುರ / ಪಟ್ಟಕದ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪಾದದ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಪಟ್ಟಕದ ಹೆಸರು	ಗೋಪುರದ ಹೆಸರು.
ಪಟ್ಟಕ / ಗೋಪುರ		
3 ಬಾಹುಗಳು		
4 ಬಾಹುಗಳು		
5 ಬಾಹುಗಳು		
6 ಬಾಹುಗಳು		
8 ಬಾಹುಗಳು		

3. ಪಟ್ಟಕ ಮತ್ತು ಗೋಪುರ ಮಧ್ಯವಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

## ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.



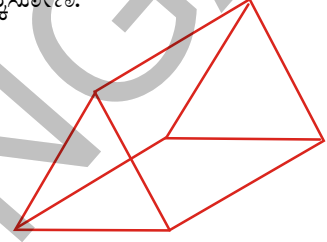
ಒಂದು ನಿಯಮಿತ ಗೋಪುರದಂದು ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅನಂತರದವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಆಗ ಉಂಟಾದ ಗೋಪುರದ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುವ ಆಕಾರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

## 13.6 ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಅಂಚುಗಳು, ಮುಖಗಳು ಮತ್ತು ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಂಚುಗಳು, ಮುಖಗಳು ಮತ್ತು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸೋಣ.

ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5 ಮುಖಗಳು
ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	9 ಅಂಚುಗಳು
ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6 ಶೃಂಗಗಳು

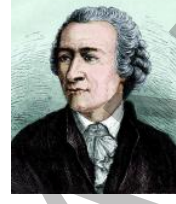
ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮತ್ತು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.



ವಸ್ತುವಿನ ಚಿತ್ರ	ವಸ್ತುವಿನ ಹೆಸರು	ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ(F)	ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (V)	ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ(E)	F+V	E+2
	ಘನ	6	8	12	6 + 8 = 14	12 + 2 = 14
	ಆಯತ ಘನ					
	ಪಂಚಭುಜ ಪಾದ ಪಟ್ಟಕ					
	ಚತುರ್ಮುಖ ಘನ					
	ಪಂಚಭುಜ ಪಾದ ಗೋಪುರ					

ಪಟ್ಟಿಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಉದ್ದಸಾಲುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಏನನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವೆಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಿಗೆ  $F + V = E + 2$  ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡು ಹಿಡಿದವರು ಗಣಿತಜ್ಞ ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್ ಆತನ ಹೇಳಿಕೆ ಏನೆಂದರೆ  $F + V = E + 2$  ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಈ ಸೂತ್ರವು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು 'ಆಯ್ಲರ್ ಸಂಬಂಧ' ಎನ್ನುವರು.

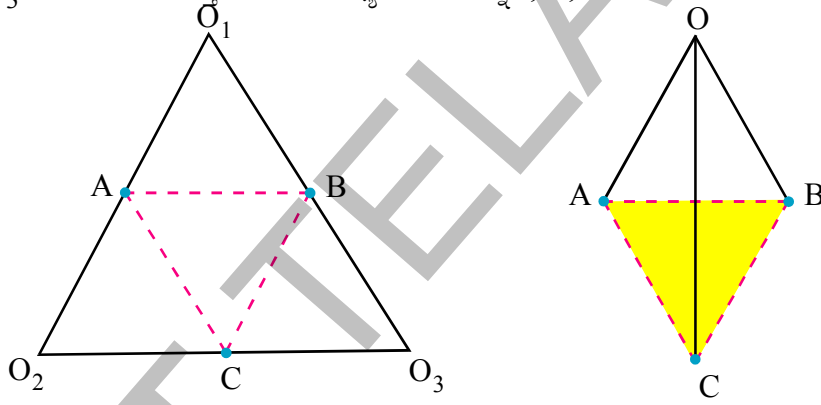


ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್  
(1707-1783)

### 13.7 ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಜಾಲಚಿತ್ರಗಳು

ಜಾಲ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ತೆರೆದ ಅಕ್ಷಿಪಂಜರವನ್ನು ಹೋಲುವ ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿ, ಜಾಲವನ್ನು ಮಡಚಿದಾಗ ಅದು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಕಾಗದ ಇಲ್ಲವೇ ರಟ್ಟನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಪಟ್ಟಕಗಳು, ಗೋಪುರಗಳನ್ನು ಜಾಲ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ತಯಾರಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ. ಶೃಂಗಗಳನ್ನು  $O_1, O_2, O_3$  ಆಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಂಚುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು  $A, B, C$  ಆಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿ.



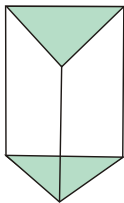
ಕಾಗದವನ್ನು  $AB, BC, CA$  ಬಳಿ ಎಳೆದ ಚುಕ್ಕೆ ಗೆರೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಮಡಚಿರಿ. ಆಗ ಮಡಚಿದ ಭಾಗಗಳು  $O_1, O_2, O_3$  ಗಳು ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದು 'O' ನಲ್ಲಿ ಸೇರುವಂತೆ ಮಡಚಿ ಇಡಿರಿ.  $AO_1$  ನ್ನು  $AO_2$  ನೊಂದಿಗೆ,  $BO_1$  ನ್ನು  $BO_3$  ನೊಂದಿಗೆ,  $CO_2$  ನ್ನು  $CO_3$  ನೊಂದಿಗೆ ಸೇರುವ ಹಾಗೆ ಮಡಚಿ ಇಡಿರಿ. ಈಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಚತುರ್ಮುಖ ಘನ (ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರ)  $O_1, O_2, O_3$  ಗಳಿಂದ ಇರುವ ಚಿತ್ರ ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರದ ಜಾಲ ರೂಪ.



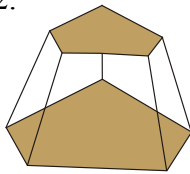
### ಅಭ್ಯಾಸ - 13.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮುಖಗಳು, ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಮತ್ತು ಆಯ್ಲರ್ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸರಿನೋಡಿರಿ.

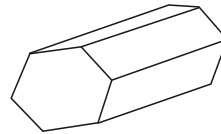
1.



2.



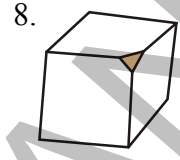
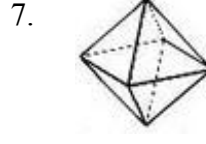
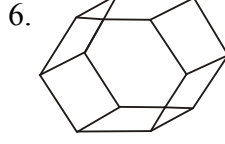
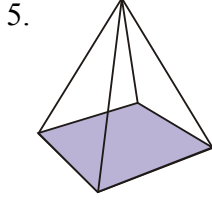
3.



4.



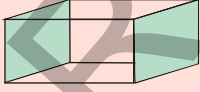
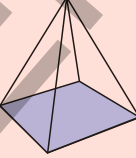





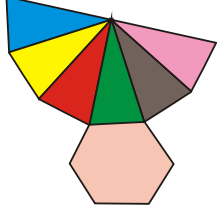
2. ವರ್ಗಪಾದ ಪಟ್ಟಕ ಮತ್ತು ಘನ ಒಂದೇನಾ? ವಿವರಿಸಿರಿ.
3. ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗೆ 3 ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಮುಖಗಳು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆಯಾ? ವಿವರಿಸಿರಿ.
4. ಯಾವುದೇ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗೆ 4 ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಮುಖಗಳು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆಯಾ? ವಿವರಿಸಿರಿ.
5. ಆಯ್ಲರ್ ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

F	8	5	?
V	6	?	12
E	?	9	30

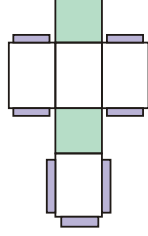
6. ಯಾವುದಾದರೂ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗೆ 10 ಮುಖಗಳು, 20 ಅಂಚುಗಳು ಮತ್ತು 15 ಶೃಂಗಗಳು ಇರಬಹುದೇ? ವಿವರಿಸಿರಿ.
7. ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

ವಸ್ತು	ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
		
		
		

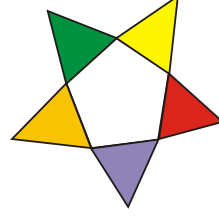
8. ಕೆಳಗಿನ ಜಾಲ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಯಾವ ತ್ರಿಮಿತಿ ಆಕೃತಿ ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ..



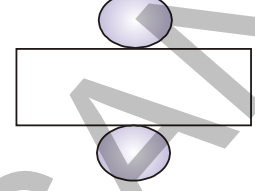
(i)



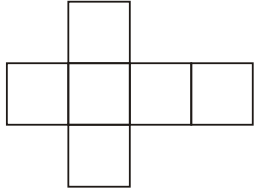
(ii)



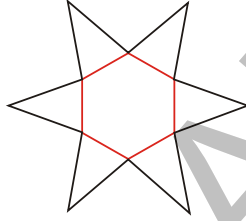
(iii)



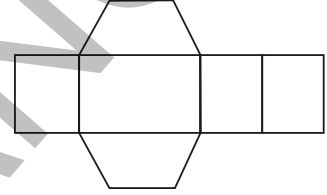
(iv)



(v)



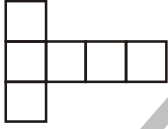
(vi)



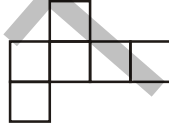
(vii)

9. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೌಕಳಿ ಪುಸ್ತಕದ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದು ಯಾವ ಜಾಲ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಘನವನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

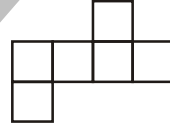
(i)



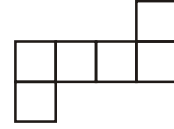
(a)



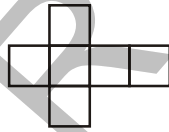
(b)



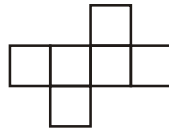
(c)



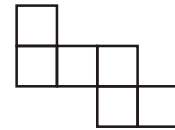
(d)



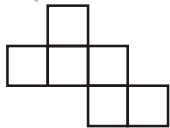
(e)



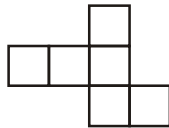
(f)



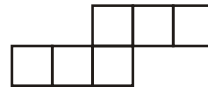
(g)



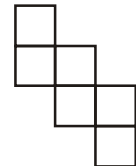
(h)



(i)



(j)

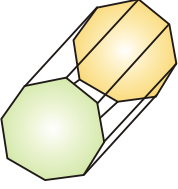


(k)

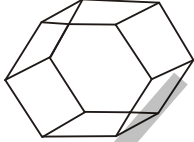
(ii). ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ..

- (ಅ) ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳು, ನಾಲ್ಕು ಮುಖಗಳಿರುವ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ?
- (ಆ) ಶೃಂಗವೇ ಇಲ್ಲದ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ?
- (ಇ) 12 ಅಂಚುಗಳಿರುವ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ?
- (ಈ) ಒಂದೇ ಒಂದು ಮುಖವಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಯ ವಸ್ತುವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.
- (ಉ) ಘನವು ಆಯತ ಘನದಿಂದ ಹೇಗೆ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ?
- (ಊ) ಯಾವ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಚುಗಳು, ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಮುಖಗಳಿವೆ?
- (ಋ) 5 ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು 5 ಮುಖಗಳಿರುವ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಯ ಹೆಸರೇನು?

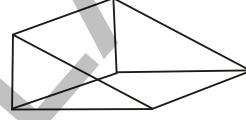
(iii). ಕೆಳಗಿನ ವಸ್ತುಗಳ ಹೆಸರುಗಳೇನು?



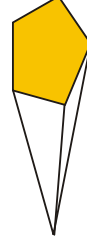
(ಅ)



(ಆ)



(ಇ)



(ಈ)

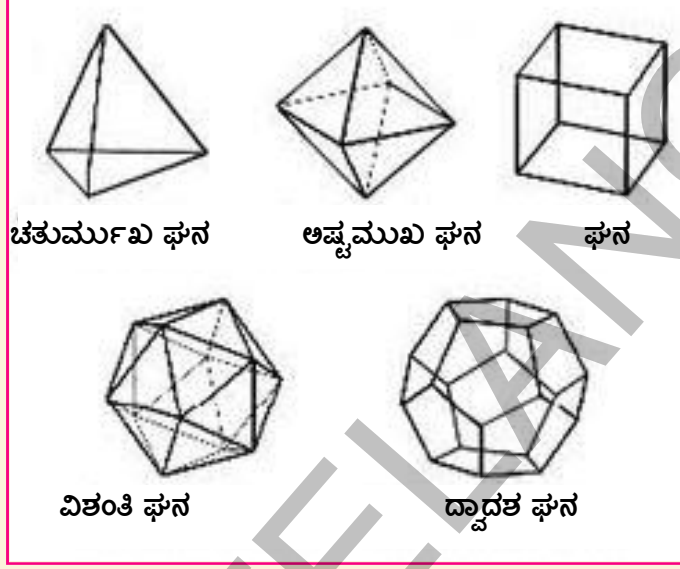


### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. ಮೂರು ಮತ್ತು ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳ ಚುಕ್ಕೆ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ (isometric dot paper) ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕು.
2. ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ನೋಟಗಳಾದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ನೋಟ, ಪಾರ್ಶ್ವನೋಟ ಮತ್ತು ಮುಂಭಾಗದ ನೋಟ.
3. ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿ : ಸಮತಟ್ಟಾದ ಬಾಹ್ಯರೂಪ ಇರುವ ಘನ ವಸ್ತುಗಳು. .
4. ಪಟ್ಟಕ : ಪಟ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪಾದ ಹಾಗೂ ಮೇಲ್ಮುಖ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ಹಾಗೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.
5. ಪಿರಮಿಡ್ (ಗೋಪುರಾಕೃತಿ) : ಗೋಪುರದಲ್ಲಿ ಪಾದವು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿದ್ದು ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
6. ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಜಾಲಗಳಿಂದ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳ ರಚನೆ.
7. ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಆಯ್ಲರ್ ಸೂತ್ರ :  $E + 2 = F + V$ .

ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ?

ಕೇವಲ ಮಾತ್ರನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲವೂ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗಳು, ಆಗಾಗ ಇವನ್ನು ನಿಷ್ಕಾಮ ಘನಗಳು ಪ್ಲಾಟೋನಿಯನ್ ಸ್ಪರ್ಶಾಂತವಾಗಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತಾರೆ.



ಘನ ಕೇವಲ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿ. ಇದು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಅಂತರಾಳದಿಂದ ತುಂಬಿರುತ್ತದೆ.

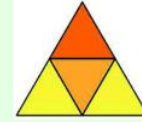
ಪ್ಲೇಟೋನಿಕ್ ವಸ್ತುಗಳ ಜಾಲರೂಪಗಳು

ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮುಖಗಳು

ಚತುರ್ಮುಖ ಘನ

4 ತ್ರಿಭುಜಗಳು

ಜಾಲದ ಚಿತ್ರ



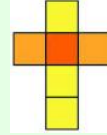
ಅಷ್ಟಮುಖ ಘನ

8 ತ್ರಿಭುಜಗಳು



ಘನ

6 ಚೌಕಗಳು



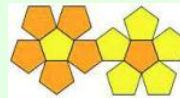
ವಿಶಂತಿ ಘನ

20 ತ್ರಿಭುಜಗಳು



ದ್ವಾದಶ ಘನ

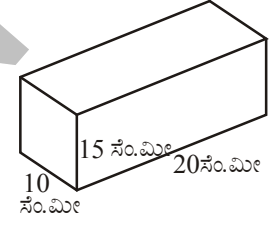
12 ಪಂಚ ಭುಜಗಳು



## ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

### 14.0 ಪರಿಚಯ

ಸುರೇಶ್ ತನ್ನ ಗಿಫ್ಟ್ ಬಾಕ್ಸ್‌ನ್ನು ಬಣ್ಣದ ಪೇಪರಿನಿಂದ ಅಲಂಕರಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಸ್ನೇಹಿತರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರು 100 ಸೆ.ಮೀ.<sup>2</sup> ಪೇಪರನ್ನು ಮತ್ತೊಬ್ಬ ಸ್ನೇಹಿತ 200 ಸೆ.ಮೀ.<sup>2</sup> ಪೇಪರನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಸೂಚಿಸಿದನು. ಯಾರ ಸೂಚನೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ? ಆದರೆ ಗಿಫ್ಟ್ ಪ್ಯಾಕಿಂಗ್ ಗೋಸ್ಪರ ಸುರೇಶ್ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಹೊಂದಿದ ಬಣ್ಣದ ಪೇಪರನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕೋ? ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುತ್ತಾನೆ ಬೇಕಾದ ಪೇಪರಿನ ಪ್ರಮಾಣ, ಗಿಫ್ಟ್ ಬಾಕ್ಸ್‌ನ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

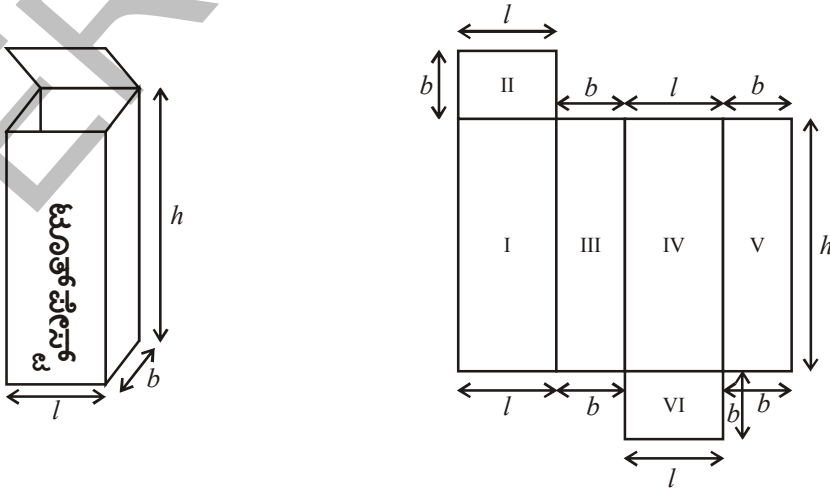


ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಹೊರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

### 14.1 ಆಯತ ಘನ

ದಪ್ಪ ರಚ್ಚಿನ ಕಾಗದದಿಂದ ತಯಾರು ಮಾಡಿದ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆ. (ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಟೂತ್‌ಪೇಸ್ಟ್ ಬಾಕ್ಸ್‌ನ್ನು) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅದನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಕತ್ತರಿಸಿ, ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಆಕಾರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ನೀವು ಎಷ್ಟು ಜೊತೆ ಸರ್ವಸಮಗಳಾದ ಆಯತಗಳ ಮುಖಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.



ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದ 'l', ಅಗಲ 'b', ಎತ್ತರ 'h' ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿವೆ. ಇಲ್ಲಿನಾವು ಮೂರು ಜೊತೆ ಸರ್ವಸಮ ಆಯತಾಕಾರಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned} & \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ I} + \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ II} + \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ III} + \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ IV} + \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ V} + \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ VI} \\ & = h \times l + l \times b + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $2(h \times l + b \times h + b \times l)$

$$= 2(lb + bh + hl)$$

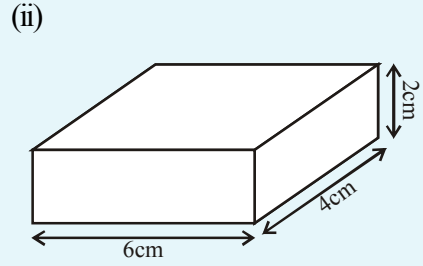
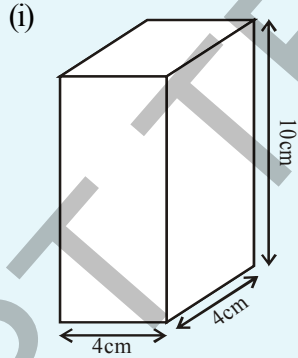
ಸುರೇಶ್ ಕೊಂಡ ಗಿಫ್ಟ್ ಬಾಕ್ಸ್‌ನ ಅಳತೆಗಳು 20 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದ, 10 ಸೆ.ಮೀ. ಅಗಲ, 15 ಸೆ.ಮೀ. ಎತ್ತರ, ಆದ್ದರಿಂದ

$$\begin{aligned} \text{ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ(T.S.A)} & = 2(20 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20) \\ & = 2(200 + 150 + 300) \\ & = 2(650) = 1300 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \end{aligned}$$



ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

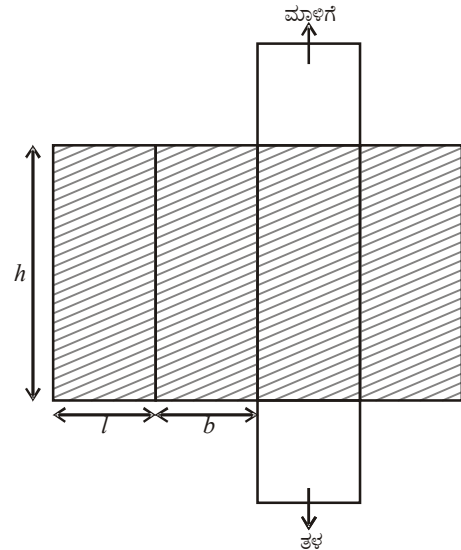


### 14.1.2 ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :

- ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು (ಮೇಲಿನ ಮುಖ, ತಳಮುಖಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು) ಆಯತ ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಾವು ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಕೋಣೆಯು ನಾಲ್ಕು ಗೋಡೆಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಆ ಕೋಣೆಯ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned} \text{(L.S.A.)} & = (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h) \\ & = 2lh + 2bh \\ & = 2h(l + b) \end{aligned}$$





**ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.**

- (i) ನೀವು, ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಶಿಕ್ಷಕನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಆಯತನ ಘನಾಕೃತಿ ಡೆಸ್ಕನ ಅಂಚುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸ್ವೇಲಿನಿಂದ ಅಳೆದು ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (ii) ಡೆಸ್ಕನನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದಿಂದ ಅದರ ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲಾ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಸುತ್ತುವರಿಯುವಂತೆ ಬಿಗಿಯಾಗಿ ಸುತ್ತಿ ಆ ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದು ಚದರ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ, ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (ii) ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಅಳೆದು
  - (a) ಕೋಣೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( ಬಾಗಿಲು, ಕಿಟಕಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಡಿ)
  - (b) ಕೋಣೆಯ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
  - (c) ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಬಳೆದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಬರೆಯಿರಿ.**

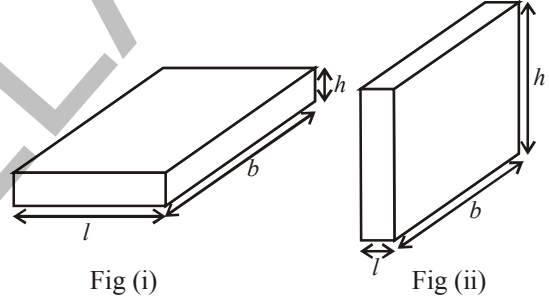


1. ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} + 2 \times \text{ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}$$

ಎಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲೀರಾ?

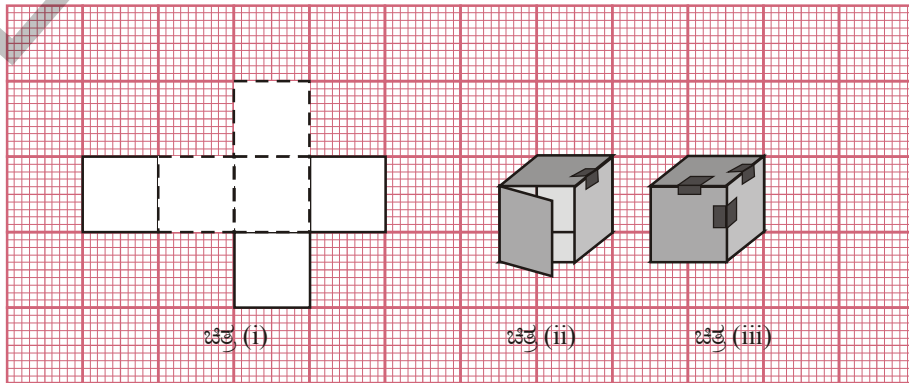
2. ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಆಯತದ ಭಂಗಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರ (ii) ರ ಹಾಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾಗಿರುತ್ತವೆಯೇ?



3. ಉದ್ದ ( $l$ ), ಅಗಲ ( $b$ ), ಎತ್ತರ ( $h$ ) ಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಆಯತ ಘನದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಪೂ.ಮೇ.ವಿ. ಮತ್ತು ಪಾ.ಮೇ.ವಿ. ಗಳಿಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

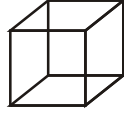
**14.2 ಘನ**

ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಜಾಲವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಚಿತ್ರ (ii) ಮತ್ತು (iii) ರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಮಡಚಿ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಸೇರುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಆಕೃತಿ ಯಾವುದು? ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

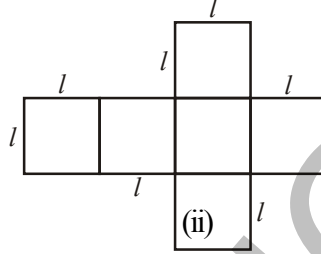


ಆಯತ ಘನ ಮತ್ತು ಅದರ ಜಾಲ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಚಿತ್ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಲ್ಲಿ ಘನದ ಎಲ್ಲಾ ಮುಖಗಳು ಚೌಕಾಕಾರಗಳೇ? ಘನದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಸಮಾನವೇ?



(i)



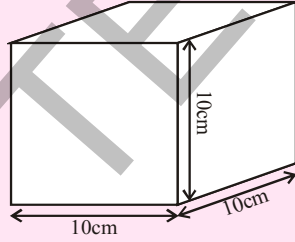
(ii)

- ಘನಕ್ಕಿರುವ ಮುಖಗಳೆಷ್ಟು? ಎಲ್ಲಾ ಮುಖಗಳು ಸಮವೇ?
- ಘನದ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ  $l$  ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಮುಖದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?
- ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?
- ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

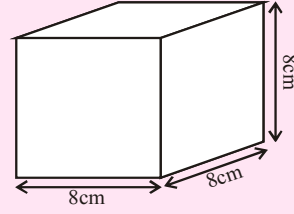


ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

- 'A' ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು 'B' ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

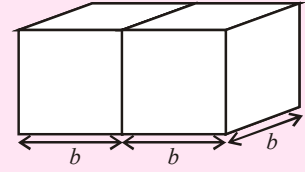


A

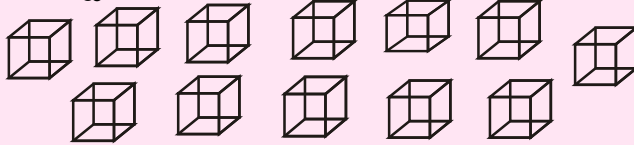


B

- 'b' ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಘನಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಜೊತೆಮಾಡಿ ಆಯತಘನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ, ಆ ಆಯತ ಘನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?



- ಸಮಾನ ಬಾಹು ಉದ್ದವಿರುವ 12 ಘನಗಳನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಜೊತೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಅತ್ಯಲ್ಪ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿದ ಆಯತ ಘನ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೋ ವಿವರಿಸಿರಿ?



- $4 \times 4 \times 4$  ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಘನಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಆ ಘನ 64 ಸಮ ಘನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. (a) ಒಂದು ಮುಖ ಮಾತ್ರವೇ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಿದ ಘನಗಳೆಷ್ಟು? (b) ಎರಡು ಮುಖಗಳು ಬಣ್ಣ ಹಾಕಿದ ಘನಗಳೆಷ್ಟು? (c) ಮೂರು ಮುಖಗಳು ಬಣ್ಣ ಹಾಕಿದ ಘನಗಳೆಷ್ಟು? (d) ಯಾವ ಮುಖವೂ ಸಹ ಬಣ್ಣ ಹಾಕದ ಘನಗಳೆಷ್ಟು?



**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಉದ್ದ 15ಸೆ.ಮೀ., ಅಗಲ 12ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 10ಸೆ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಗಿರುವ ಆಯತ ಘನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ( $l$ ) = 15ಸೆ.ಮೀ.

ಆಯತ ಘನದ ಅಗಲ( $b$ ) = 12ಸೆ.ಮೀ.

ಆಯತ ಘನದ ಎತ್ತರ( $h$ ) = 10ಸೆ.ಮೀ.

$$\begin{aligned} \text{ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= 2 (lb + bh + hl) \\ &= 2 (15 \times 12 + 12 \times 10 + 10 \times 15) \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\ &= 2 (180 + 120 + 150) \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\ &= 2 (450) \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\ &= 900 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2 :** ಒಂದು ಘನದ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವನ್ನು ಎರಡರಷ್ಟು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟುಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಒಂದು ಘನದ ಬಾಹು = ' $x$ ' ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಘನದ ಬಾಹು =  $2x$

ಕೊಟ್ಟ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $6x^2$

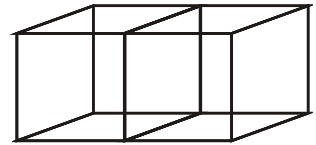
ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $6(2x)^2 = 6(4x^2) = 4(6x^2)$

ಅದರ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ದ್ವಿಗುಣ ಗೊಳಿಸಿದಾಗ

ಹೊಸ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $4 \times$  ಕೊಟ್ಟ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ 4 ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** ಪ್ರತಿ ಬಾಹು 6 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಘನಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?



**ಪರಿಹಾರ :** ಘನವು ಆರು ಮುಖಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಘನಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಆಯತ ಘನವಾಗಿ ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಎರಡು ಮುಖಗಳನ್ನು ನಾವು ನೋಡಲಾರೆವು. ಅಂದರೆ ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮುಖಗಳು  $12 - 2 = 10$  ಚದರ ಮುಖಗಳು

$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= 10 \times l^2 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\ &= 10 \times (6)^2 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\ &= 10 \times 36 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 = 360 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \end{aligned}$$

**ಪ್ರತ್ಯಾಮ್ನಾಯ ಪದ್ಧತಿ :**

6ಸೆ.ಮೀ ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ಘನಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮುಖ ಮತ್ತೊಂದರೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಜೊತೆಮಾಡಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ (6 + 6) ಸೆ.ಮೀ. ಅಗಲ 6ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 6ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅದರ ಅಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆ.ಮೀ, 6ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 6ಸೆ.ಮೀ.

$$\begin{aligned}
 &\text{ಆಯತ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\
 &= 2(lb + bh + lh) \\
 &= 2(12 \times 6 + 6 \times 6 + 12 \times 6) \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \\
 &= 2(72 + 36 + 72) \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \\
 &= 2 \times 180 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \\
 &= 360 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2
 \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** 60 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದ, 40 ಸೆ.ಮೀ. ಅಗಲ ಮತ್ತು 30 ಸೆ.ಮೀ ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಮುಚ್ಚಿದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಬಾಹ್ಯಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣಹಾಕಲು 20ಸೆ.ಮೀ<sup>2</sup> ಆಗುವ ಖರ್ಚು 50 ಪೈಸೆಗಳು. ಆದರೆ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು?

$$\begin{aligned}
 \text{ಪರಿಹಾರ : } &\text{ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಉದ್ದ}(l) = 60 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \\
 &\text{ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಗಲ}(b) = 40 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \\
 &\text{ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಎತ್ತರ}(h) = 30 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \\
 &\text{ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 2(lb + bh + hl) \\
 &= 2(60 \times 40 + 40 \times 30 + 60 \times 30) \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\
 &= 2(2400 + 1200 + 1800) \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\
 &= 2 \times 5400 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2 \\
 &= 10800 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^2
 \end{aligned}$$

$$20 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \text{ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚ} = 50 \text{ ಪೈಸೆ} = ₹ \frac{50}{100}$$

$$\therefore 1 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \text{ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚ} = ₹ \frac{50}{100} \times \frac{1}{20}$$

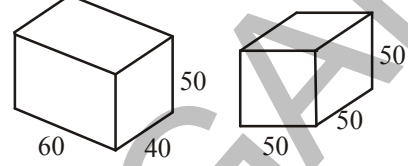
$$\therefore 10800 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2 \text{ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ವೆಚ್ಚ} = ₹ \frac{50}{100} \times \frac{1}{20} \times 10,800$$

$$= ₹ 270$$



ಅಭ್ಯಾಸ -14.1

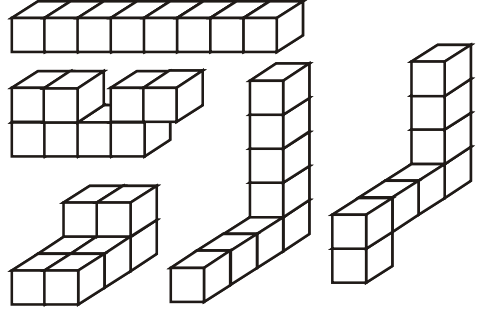
- ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಎರಡು ಆಯತ ಘನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಯಾವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಸಾಮಗ್ರಿ ಅವಸರವಾಗುತ್ತದೆ?



- ಒಂದು ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು  $600 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^2$  ಆದರೆ ಆ ಘನದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಪ್ರಮೀಳ 1 ಮೀ.  $\times$  2 ಮೀ  $\times$  1.5 ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಿದ್ದಾಳೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮೇಲ್ಮುಖ ಮತ್ತು ಕೆಳಮುಖಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?
- $20 \text{ ಸೆ.ಮೀ} \times 15 \text{ ಸೆ.ಮೀ} \times 12 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$  ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತ ಘನಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣಹಾಕಲು ಚದರ ಸೆ.ಮೀ 5 ಪ್ರೈಸೆಯಂತೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು?

14.3 ಘನ ಮತ್ತು ಆಯತ ಘನದ ಘನ ಫಲಗಳು.

ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಯು ಆಕೃತಿಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವನ್ನು ಅದರ ಘನಫಲ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಿಮ್ಮ ಕೋಣೆಯ ಘನಫಲ, ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬೀರುವಾ ಘನಫಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಬಾಕ್ಸ್‌ನ ಘನಫಲ ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು ಅಳಿಸುವ ರಬ್ಬರ್ ಘನಫಲಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ?



ನಮಗೆ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚದರ ಮಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ, ಆದರೆ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ? ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಘನಮಾನದಲ್ಲಿ ಘನಫಲವನ್ನು ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಘನವೇ ಅನುಗುಣವಾದದ್ದು (ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಚೌಕದ ಪ್ರಮಾಣದ ಹಾಗೆ).

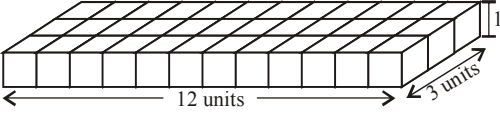
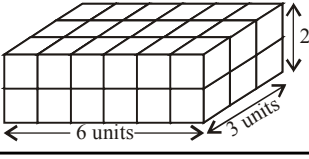
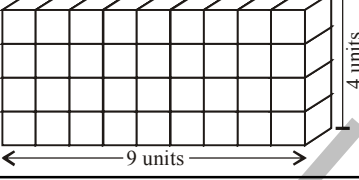
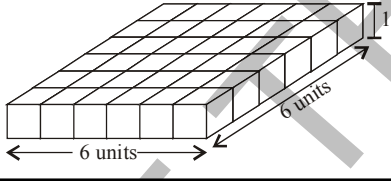
ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಮೂಲಮಾನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಘನಮಾನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕು. 1 ಮೂಲಮಾನ ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಘನವನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮಾಣ ಘನವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತಾರೆ. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವಸ್ತುವೂ ಘನಮಾನ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಘನಮಾನಗಳಾಗಿ ಅಳಿಸುತ್ತಾರೆ.

$$\begin{aligned}
 1 \text{ ಘನ ಸೆ.ಮೀ.} &= 1 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \times 1 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \times 1 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} = 1 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^3 \text{ ಅಥವಾ } 1 \text{ ಘ.ಸೆ.ಮೀ} \\
 &= 10 \text{ ಮೀ.ಮೀ} \times 10 \text{ ಮೀ.ಮೀ} \times 10 \text{ ಮೀ.ಮೀ} = \text{_____ ಮೀ.ಮೀ}^3 \\
 1 \text{ ಘನ ಸೆ.ಮೀ.} &= 1 \text{ ಮೀ} \times 1 \text{ ಮೀ} \times 1 \text{ ಮೀ} = 1 \text{ ಮೀ}^3 \\
 &= 100 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \times 100 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \times 100 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} = \text{_____ ಸೆ.ಮೀ.}^3 \\
 1 \text{ ಘನ ಸೆ.ಮೀ.} &= 1 \text{ ಮೀ.ಮೀ.} \times 1 \text{ ಮೀ.ಮೀ.} \times 1 \text{ ಮೀ.ಮೀ.} = 1 \text{ ಮೀ.ಮೀ}^3 \\
 &= 0.1 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \times 0.1 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \times 0.1 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} = \text{_____ ಸೆ.ಮೀ.}^3
 \end{aligned}$$

## 14.3.1 ಆಯತಘನದ ಘನಫಲ

36 ಘನಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಯತ ಘನವನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ. ನೀವು ಅನೇಕ ವಿಧಗಳಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಆಯತಘನ	ಉದ್ದ ( $l$ )	ಅಗಲ ( $b$ )	ಎತ್ತರ ( $h$ )	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

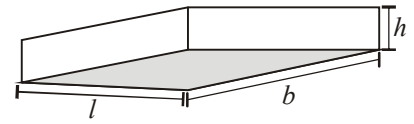
ಘನದ ಅಳತೆಗಳಿಗೂ, ಘನಫಲಕ್ಕೂ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

ನಾವು 36 ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ

36 ಘನಮಾನಗಳು. ಈ ಬೆಲೆ ಆಯತಘನದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ

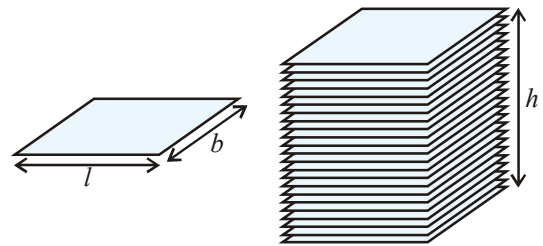
ಸಮ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದು= $l \times b \times h$ . ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $l \times b$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ = ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $\times$  ಎತ್ತರ.



## ಚಟುವಟಿಕೆ

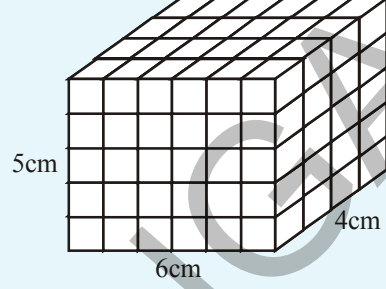
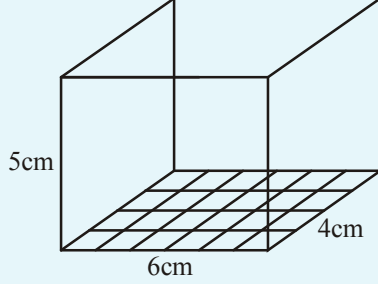
ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದೇ ಅಳತೆ ಇರುವ ಕೆಲವು ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಒಂದರಮೇಲೊಂದು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಆಯತ ಘನ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಎತ್ತರದೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿ. ಆ ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.





**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.**

6ಸೆಂ.ಮೀ, 4ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು 5ಸೆಂ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



1 ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂಚು ಆಗಿರುವ ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳನ್ನು ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಘನಗಳು ಅವಶ್ಯಕ? 6 ಘನಗಳು ಅವಶ್ಯಕ. ಕಾರಣ ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ 6 ಸೆಂ.ಮೀ ಇದೆ.

ಅಗಲಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಂತೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಘನಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದು? 4 ಘನಗಳನ್ನು, ಇದಕ್ಕಿರುವ ಕಾರಣ ಆಯತ ದ ಅಗಲ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಪದರದಲ್ಲಿ 6 × 4 ಘನಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಆಯತ ಘನಗಳಲ್ಲಿ ಘನಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಪದರಗಳು ಎಷ್ಟು? 5 ಪದರಗಳು, ಅಂದರೆ ಆಯತ ಘನದ ಎತ್ತರ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪ್ರತಿ ಪದರ 6 × 4 ಘನಗಳು ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 5 ಪದರಗಳಲ್ಲಿ 6 × 4 × 5 ಪ್ರಮಾಣಗಳಿರುವ ಘನಗಳ ದಿಮ್ಮಿಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಉದ್ದ × ಅಗಲ × ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಸಮ.

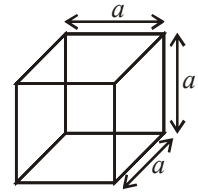
ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ × ಎತ್ತರ.

**14.3.2 ಘನದ ಘನಫಲ**

ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಎತ್ತರಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಘನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಘನದ ಘನಫಲ = ಬಾಹು × ಬಾಹು × ಬಾಹು  
= (ಬಾಹು)<sup>3</sup> = a<sup>3</sup>



ಇಲ್ಲಿ a ಘನದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ.

ಘನದ ಉದ್ದ	ಘನದ ಘನಫಲ
10ಮೀ.ಮೀ = 1ಸೆಂ.ಮೀ	1000 ಮೀ.ಮೀ <sup>3</sup> = 1ಸೆಂ.ಮೀ <sup>3</sup>
10ಸೆಂ.ಮೀ = 1ಡೆಕಿ.ಮೀ	1000 ಸೆಂ.ಮೀ <sup>3</sup> = 1ಡೆಕಾಮೀ <sup>3</sup>
10dm = 1ಮೀ	1000 ಡೆಕಂಮೀ <sup>3</sup> = 1 ಮೀ <sup>3</sup>
100ಸೆಂ.ಮೀ = 1ಮೀ	1000000 ಸೆಂ.ಮೀ <sup>3</sup> = 1 ಮೀ <sup>3</sup>
1000ಮೀ = 1ಕಿ.ಮೀ	1000000000 ಮೀ <sup>3</sup> = 1ಕಿಮೀ <sup>3</sup>

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ದ್ರವ ಪದಾರ್ಥಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿ ಲೀಟರ್ (ಮಿ.ಲೀ) ಅಥವಾ ಲೀಟರ್ ಗಳಲ್ಲಿ (ಲೀ) ಅಳೆಯುತ್ತಾರೆ.

$$\begin{aligned} 1 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^3 &= 1 \text{ ಮಿಲ್ಲಿ ಲೀಟರ್} \\ 1000 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^3 &= 1 \text{ ಲೀಟರ್} \\ 1 \text{ ಮೀ}^3 &= 1000000 \text{ ಸೆ.ಮೀ}^3 = 1000 \text{ ಲೀಟರ್} \\ &= 1 \text{ ಕಿಲೋ ಲೀಟರ್ (ಕಿ.ಲೀ)} \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** 20 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದ, 10 ಸೆ.ಮೀ ಅಗಲ ಮತ್ತು 8 ಸೆ.ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ =  $l \times b \times h$

ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದ ( $l$ ) = 20 ಸೆ.ಮೀ, ಅಗಲ ( $b$ ) = 10 ಸೆ.ಮೀ, ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ( $h$ ) = 8 ಸೆ.ಮೀ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಘನಫಲ = 20 ಸೆ.ಮೀ,  $\times$  10 ಸೆ.ಮೀ,  $\times$  8 ಸೆ.ಮೀ, = 1600 ಸೆ.ಮೀ,<sup>3</sup>

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕು 1.4 ಮೀ. ಉದ್ದ, 1 ಮೀ ಅಗಲ ಮತ್ತು 0.7 ಮೀ. ಆಳವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಲೀಟರ್ ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಉದ್ದ ( $l$ ) = 1.4 ಮೀ. = 140 ಸೆ.ಮೀ.

ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಅಗಲ ( $b$ ) = 1 ಮೀ = 100 ಸೆ.ಮೀ.

ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಎತ್ತರ ( $h$ ) = 0.7 = 70 ಸೆ.ಮೀ.

ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಘನಫಲ =  $l \times b \times h$

$$= (140 \times 100 \times 70) \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^3 = \frac{140 \times 100 \times 70}{1000} \text{ ಲೀಟರುಗಳು}$$

$$= 980 \text{ ಲೀಟರುಗಳು}$$

$$1 \text{ ಲೀಟರು} = 1000 \text{ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.}$$



**ಇವು ಮಾಡಿರಿ.**

64 ಘನಮಾನ ಘನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೀವು ಏರ್ಪಡಿಸಬಲ್ಲ ಆಯತ ಘನಗಳು ಎಷ್ಟು? ಪ್ರತಿಚೋಡಣೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸಮಾನ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಘನಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮವೇನಾ?

**ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ!**

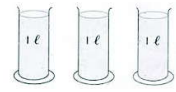
**ಸಾಮರ್ಥ್ಯ :**

ಘನಫಲ, ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬಹಳ ಕಡಿಮೆ.

(a) ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವನ್ನು ಘನಫಲ ಎನ್ನುವರು.

(b) ಒಂದು ಡಬ್ಬಾದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ, ಅದು ಹೊಂದುವ ಪದಾರ್ಥದ ಘನಫಲ.

ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ 100 ಸೆ.ಮೀ.<sup>3</sup> ಅಂದರೆ ಘನಫಲ ಆ ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ 100 ಸೆ.ಮೀ.<sup>3</sup> ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಲೀಟರ್ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಹ ಅಳೆಯುತ್ತಾರೆ.



ಘನಫಲ

ಸಾಮರ್ಥ್ಯ

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಒಂದು ಆಯತಘನದ ಅಗಲ ಅದರ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ, ಎತ್ತರ ಅದರ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ ಆ ಆಯತಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಆಯತಘನದ ಉದ್ದ =  $x$  ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಆಯತಘನದ ಅಗಲ =  $\frac{x}{2}$  ಮೂಲಮಾನಗಳು

ಆಯತಘನದ ಎತ್ತರ =  $2x$  ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಆಯತಘನದ ಘನಫಲ = ಉದ್ದ  $\times$  ಅಗಲ  $\times$  ಎತ್ತರ

$$= (x \times \frac{x}{2} \times 2x) \text{ ಘನ ಮೂಲ ಮಾನಗಳು}$$

$$= x^3 \text{ ಘನ ಮೂಲ ಮಾನಗಳು.}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 8:** ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಉದ್ದ 1.8 ಮೀ, ಅಗಲ 90 ಸೆ.ಮೀ. ಎತ್ತರ 60 ಸೆ.ಮೀ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುವ ಸಾಬೂನಿನ ಅಳತೆಗಳು 6 ಸೆ.ಮೀ.  $\times$  4.5 ಸೆ.ಮೀ.  $\times$  40 ಮಿ.ಮೀ. ಸಾಬೂನುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ನಂತರ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳ ಉಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದಾದ ಸಾಬೂನುಗಳು ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಉದ್ದ (l) = 1.8 ಮೀ. = 180 ಸೆ.ಮೀ.

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಗಲ (b) = 90 ಸೆ.ಮೀ.

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಎತ್ತರ (h) = 60 ಸೆ.ಮೀ.

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲ =  $l \times b \times h$

$$= 180 \times 90 \times 60 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^3$$

$$= 972000 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^3$$

ಸಾಬೂನಿನ ಉದ್ದ = 6 ಸೆ.ಮೀ.

ಸಾಬೂನಿನ ಅಗಲ = 4.5 ಸೆ.ಮೀ.

ಸಾಬೂನಿನ ಎತ್ತರ = 40 ಮಿ.ಮೀ. = 4 ಸೆ.ಮೀ.

ಸಾಬೂನಿನ ಘನಫಲ =  $6 \times 4.5 \times 4 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^3$

$$= 108.0 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}^3$$

$$\therefore \text{ ಬೇಕಾದ ಸಾಬೂನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = \frac{\text{ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲ}}{\text{ಪ್ರತಿ ಸಾಬೂನಿನ ಘನಫಲ}}$$

$$= \frac{972000}{108}$$

$$= 9000$$

ಅಂದರೆ ಬಾಕಿನಲ್ಲಿ 9000 ಸಾಬೂನುಗಳನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ 9:** 21 ಸೆ.ಮೀ, 9 ಸೆ.ಮೀ ಮತ್ತು 8ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿ 3 ಸೆ.ಮೀ ಅಂಚುಗಳಾಗಿರುವ ಘನಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಘನಗಳು ಬರುತ್ತವೆ? ಎಷ್ಟು ಘನಫಲವಿರುವ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿ ವ್ಯರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ?

**ಉದಾಹರಣೆ:**

ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಉದ್ದ(l)	=	21 ಸೆ.ಮೀ
ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಅಗಲ(b)	=	9 ಸೆ.ಮೀ
ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಎತ್ತರ(h)	=	8 ಸೆ.ಮೀ
ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಘನಫಲ	=	$21 \times 9 \times 8 = 1512$ ಘ.ಸೆ.ಮೀ.
ಉದ್ದದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಬಹುದಾದ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	=	$\frac{21}{3} = 7$
ಅಗಲದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಬಹುದಾದ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	=	$\frac{9}{3} = 3$
ಎತ್ತರದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಬಹುದಾದ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	=	$\frac{8}{3} = 2.6$
ಎತ್ತರದ ಮೂಲಕ ನಾವು ಕತ್ತರಿಸಬಹುದಾದ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಉಳಿದ ಭಾಗ ವ್ಯರ್ಥ		
$\therefore$ ಒಟ್ಟು ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	=	$7 \times 3 \times 2$
	=	42
ಪ್ರತಿ ಘನದ ಘನಫಲ = $3 \times 3 \times 3$	=	$27$ ಸೆ.ಮೀ <sup>3</sup>
ಎಲ್ಲಾ ಘನಗಳ ಘನಫಲ	=	$27 \times 42$
	=	1134 ಸೆ.ಮೀ <sup>3</sup>
$\therefore$ ವ್ಯರ್ಥವಾದ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಘನಫಲ = $1512 - 1134 = 378$ ಸೆ.ಮೀ <sup>3</sup>		

**ಉದಾಹರಣೆ 10:** ಒಂದು ರಿಜರ್ವಾಯರ್ ಯೋಜನೆಗೆ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 60 ಲೀಟರ್ ಗಳ ನೀರನ್ನು ಪಂಪು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಆ ರಿಜರ್ವಾಯರ್ ಘನಫಲ 108 ಮೀ<sup>3</sup>. ಆದರೆ ಆ ರಿಜರ್ವಾಯರ್ ತುಂಬಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ.

**ಪರಿಹಾರ :** ರಿಜರ್ವಾಯರ್ ನ ಘನಫಲ =  $108$  ಮೀ<sup>3</sup> =  $108 \times 1000$  ಲೀಟರ್  
( $\because$  1 ಮೀ<sup>3</sup> ಅಥವಾ 1 ಘ.ಸೆ.ಮೀ = 1000 ಲೀಟರ್)

ರಿಜರ್ವಾಯರ್ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 60 ಲೀಟರ್ ನಂತೆ ತುಂಬುತ್ತಾ ಇದ್ದರೆ,

$$\therefore \text{ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ} = \frac{108 \times 1000}{60} \text{ ನಿಮಿಷಗಳು.}$$

$$= \frac{108 \times 1000}{60 \times 60} \text{ ಗಂಟೆಗಳು} = 30 \text{ ಗಂಟೆಗಳು.}$$



**ಉದಾಹರಣೆ 11 :** ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ 4000, ಪ್ರತಿ ದಿನ ಆ ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ದಿನಕ್ಕೆ 150 ಲೀಟರ್‌ಗಳ ನೀರು ಅವಶ್ಯಕ. ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಅಳತೆಗಳು 20 ಮೀ, 15 ಮೀ, 6 ಮೀ. ಆ ಟ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿರುವ ನೀರು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಿಗೆ ಸಾಕಾಗುವುದೋ ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಘನಫಲ = 20 ಮೀ × 15 ಮೀ × 6 ಮೀ  
= 1800 ಮೀ<sup>3</sup> = 1800000 ಲೀಟರ್

ಒಬ್ಬವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ = 150 ಲೀಟರ್.

ಒಟ್ಟು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ = 150 × 4000

$$\begin{aligned} \text{ನೀರು ಸಾಕಾಗುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} &= \frac{\text{ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಘನಫಲ}}{\text{ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ}} \\ &= \frac{1800000}{150 \times 4000} = 3 \text{ ದಿನಗಳು} \end{aligned}$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 14.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳು ಹೊಂದಿದ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

	ಉದ್ದ	ಅಗಲ	ಎತ್ತರ
(i)	8.2 ಮೀ.	5.3 ಮೀ.	2.6 ಮೀ.
(ii)	5.0 ಮೀ.	4.0 ಮೀ.	3.5 ಮೀ.
(iii)	4.5 ಮೀ.	2.0 ಮೀ.	2.5 ಮೀ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಘನ ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

	ಉದ್ದ	ಅಗಲ	ಎತ್ತರ
(i)	3 ಮೀ 20 ಸೆ.ಮೀ	2 ಮೀ 90 ಸೆ.ಮೀ	1 ಮೀ 50 ಸೆ.ಮೀ
(ii)	2 ಮೀ 50 ಸೆ.ಮೀ	1 ಮೀ 60 ಸೆ.ಮೀ	1 ಮೀ 30 ಸೆ.ಮೀ
(iii)	7 ಮೀ 30 ಸೆ.ಮೀ	3 ಮೀ 60 ಸೆ.ಮೀ	1 ಮೀ 40 ಸೆ.ಮೀ

3. ಒಂದು ಘನದ ಅಂಚನ್ನು ಅರ್ಧಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಘನಫಲ ಕಡಿಮೆ ಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ? ಬದಲಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ?

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಳತೆಗಳು ಅಂಚುಗಳಾಗಿ ಇರುವ ಘನಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(i) 6.4 ಸೆ.ಮೀ. (ii) 1.3 ಮೀ (iii) 1.6 ಮೀ.
5. 8 ಮೀ  $\times$  22.5 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  6 ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಗೋಡೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು 22.5 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  11.5 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  6 ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಎಷ್ಟು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಅವಶ್ಯಕ?
6. 25 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದ, 15 ಸೆ.ಮೀ ಅಗಲ ಮತ್ತು 8 ಸೆ.ಮೀ ಎತ್ತರ ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲವು, ಪ್ರತಿ ಅಂಚು 16 ಸೆ.ಮೀ ಯಾಗಿರುವ ಘನದ ಘನಫಲದೊಂದಿಗೆ ಎಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುತ್ತದೆ?
7. 1 ಸೆ.ಮೀ ಮಂದವಿರುವ ಚೆಕ್ಕೆಯಿಂದ 5 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  4 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  7 ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳು ಹೊಂದಿದ ಮುಚ್ಚಳವಿರುವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಯ ತಯಾರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಘನಫಲ ಇರುವ ಚೆಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕ.
8. 20 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  18 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  16 ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತ ಘನದಿಂದ 4 ಸೆ.ಮೀ ಅಂಚುಗಳಾಗಿರುವ ಎಷ್ಟು ಘನಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.
9. 12 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  9 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  6 ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಆಯತ ಘನದಿಂದ 4 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  3 ಸೆ.ಮೀ  $\times$  2 ಸೆ.ಮೀ ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ಎಷ್ಟು ಆಯತ ಘನಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು.
10. ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆ 30 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದ, 25 ಸೆ.ಮೀ ಅಗಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 4.5 ಲೀಟರ್ ಗಳ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು?



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು ?

- ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $l$ ,  $b$ , ಮತ್ತು  $h$  ಗಳಾದರೆ ಇವು ಆಯತ ಘನದ ಅಳತೆಗಳು.  
(i) ಆಯತ ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $2h(l + b)$   
(ii) ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $2(lb + bh + hl)$
- $a$  ಅಂಚಾಗಿರುವ ಘನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $4a^2$
- ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $6a^2$
- ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ  $l \times b \times h$
- ಘನದ ಘನಫಲ ಬಾಹು  $\times$  ಬಾಹು  $\times$  ಬಾಹು  $= a^3$
- 1 ಸೆ.ಮೀ<sup>3</sup> = 1 ಮಿ.ಲೀಟರ್  
1 ಲೀಟರ್ = 1000 ಸೆ.ಮೀ<sup>3</sup>  
1 ಮೀ. <sup>3</sup> = 1000000 ಸೆ.ಮೀ<sup>3</sup> = 1000 ಲೀಟರ್  
= 1 ಕಿ.ಲೀ. (ಕಿಲೋಲೀಟರ್)

## ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡೋಣ

### 15.0 ಪರಿಚಯ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲದಂತಹ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲದಂತೆ ನಮಗೆ ದಿನ ಹೇಗೆ ಕಳೆಯುತ್ತದೆ?

ನಮಗೆ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆ ದಿನ ಯಾವ ತಿಂಗಳು? ಎಷ್ಟನೇ ದಿನ? ಮುಂತಾದವು ತಿಳಿಯದು. ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಪೋನ್‌ನಲ್ಲಿ ಮಾತನಾಡಿ. ಮನೆ ನಂಬರ್ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಪರಿಚಿತರು ನಿಮ್ಮ ಮನೆಯ ಬಾಗಿಲನ್ನು ತಟ್ಟುತ್ತಾರೆ. ಇವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೂ ಮಾತ್ರವೇ. ಇನ್ನೂ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೋ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ನೀವು ಶಾಲೆಗೆ ಸಕಾಲದಲ್ಲಿ ಹೋಗಲಾರಿ.



ನಿಮಗೆ ಇಷ್ಟವಾದ ಕಾರ್ಡ್ ಸೀರಿಯಲ್ ಸರಿಯಾದ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಪ್ರಸಾರ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆಟಗಳಾಡಲು ಸರಿಯಾದ ಸಮಯ ನಿಮಗೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಕಗಳು ಇಲ್ಲದ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ನಾವು ಊಹಿಸಲಾರವು. ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು, ಮಾರಲು, ಬೇಕಾದ ಬಗೆಯಲ್ಲಿ ಹಂಚಲು ಅಂಕಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು. ಅಷ್ಟಲ್ಲದೇ ಈ ಅಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು.

### 15.1 ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು :

ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವನ್ನು 2, 3, 4, 5, 6, 7ಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವದೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 'a' ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 'b' ಭಾಗಿಸುವುದು ಎಂದರೆ ನಿಶೇಷ್ಯವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ಇದನ್ನು 'b' 'a' ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು ಎನ್ನುವೆವು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಜ್ಯನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿರುವ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

### 15.11 ಅಂಕಗಳ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆ

645 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ.

$$645 = 600 + 40 + 5 = 6 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 6 ರ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆ 600, 4 ರ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆ 40. 5 ರ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆ 5 ಇದರಲ್ಲಿ 6 ನೂರುಗಳು, 4 ಹತ್ತುಗಳು, 5 ಬಿಡಿಗಳು ಇರುವವು..



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ :-**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಗೆರೆ ಎಳೆದ ಅಂಕಗಳ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 29879      (ii) 10344      (iii) 98725

### 15.1.2 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಅಷ್ಟಲ್ಲದೆ ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಘಾತರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಸಹ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

ಸಾಧಾರಣ ರೂಪ

ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪ

$$68 = 60 + 8 = (10 \times 6) + 8 = (10^1 \times 6) + (10^0 \times 8)$$

$$72 = 70 + 2 = (10 \times 7) + 2 = (10^1 \times 7) + (10^0 \times 2)$$

$10^0 = 1$  ಎಂದು  
ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು

ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'a', ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'b' ಇರುವ ಒಂದು ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $(10a + b)$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದನ್ನು  $(10 \times a) + b = (10^1 \times a) + (1 \times b)$ . ( $a \neq 0$ ) ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಮೂರಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 658 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸಾಧಾರಣ ರೂಪ

ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪ

$$658 = 600 + 50 + 8 = 100 \times 6 + 10 \times 5 + 1 \times 8 = 10^2 \times 6 + 10^1 \times 5 + 1 \times 8$$

$$\text{ಅದೇ ರೀತಿ } 759 = 700 + 50 + 9 = 100 \times 7 + 10 \times 5 + 1 \times 9 = 10^2 \times 7 + 10^1 \times 5 + 1 \times 9$$

a, b, c ಅಂಕಗಳಾಗಿ ಇರುವ ಮೂರಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ  $10^2a + 10^1b + c$

$$= 100 \times a + 10 \times b + c = 100a + 10b + c, (a \neq 0) \text{ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.}$$

ಇದೇ ರೀತಿ 4 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 1000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 6$$

$$= 10^3 \times 3 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 5 + 6$$

a, b, c, d ಗಳು ಅಂಕಗಳಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \text{ (ಇಲ್ಲಿ } a \neq 0)$$

$$= 10^3a + 10^2b + 10^1c + d \text{ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.}$$



ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
  - (i) 65
  - (ii) 74
  - (iii) 153
  - (iv) 612
2. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿರಿ.
  - (i)  $10 \times 9 + 4$
  - (ii)  $100 \times 7 + 10 \times 4 + 3$
3. ಕೆಳಗಿನ ಖಾಲಿ ಜಾಗಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ.
  - (i)  $100 \times 3 + 10 \times \underline{\hspace{1cm}} + 7 = 357$
  - (ii)  $100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 = \underline{\hspace{1cm}}$
  - (iii)  $100 \times \underline{\hspace{1cm}} + 10 \times 3 + 7 = 737$
  - (iv)  $100 \times \underline{\hspace{1cm}} + 10 \times q + r = pqr$
  - (v)  $100 \times x + 10 \times y + z = \underline{\hspace{1cm}}$

### 15.1.3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳು, ಅಪವರ್ತನಗಳು :

36 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ?

36 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

36 ರ ಗರಿಷ್ಠ ಅಪವರ್ತನ ಯಾವುದು?

ಪ್ರತಿ ಅಪವರ್ತನವು ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮಾನವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಷ್ಟಲ್ಲದೆ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು '1' ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು.

$7 \times 1 = 7$ ,  $9 \times 1 = 9$ ,

1 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 1 ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಿಟ್ಟು ಇತರ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಏನೆನ್ನುವರು? ಅಮತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು' ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ಮುಂತಾದವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಕ್ರಮ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. 11, 23, 4567, 89 ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇದೇ ರೀತಿ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 191, 911, 199, 919, 991 ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೌದೋ? ಅಲ್ಲವೋ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ

ಕೆಳಗೆ 82 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ 1 ರ ವರೆಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ  
828179787776757473727170696867666564636261605958575655545352  
51504948474645444342414039383736353433323130292827262524232221201918  
1716151413121110987654321 ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳಿವೆ? ಇಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದಾದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ?

148 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$148 = 2 \times 74 = 2 \times 2 \times 37 = 2^2 \times 37^1$$

ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಘಾತಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಸೇರಿಸಲು ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.

$$\text{ಅಂದರೆ } (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$$

148 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1, 2, 4, 37, 74, 148.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ  $N = 2^a \times 3^b \times 5^c \dots$

N ನ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \dots$

6 ರ ಮೊದಲ 5 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$$6 \times 1 = 6, \quad 6 \times 2 = 12, \quad 6 \times 3 = 18, \quad 6 \times 4 = 24, \quad 6 \times 5 = 30$$

6, 12, 18, 24, 30.....6ರ ಮೊದಲ 5 ಅಪವರ್ತನಗಳು.

ಎಷ್ಟು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು? ಲೆಕ್ಕವಿಲ್ಲದಷ್ಟು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವು. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನಂತವಾದ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ :**

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ  
(a) 24      (b) 15      (c) 21      (d) 27  
(e) 12      (f) 20      (g) 18      (h) 23      (i) 36
2. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊದಲ 5 ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.  
(a) 5      (b) 8      (c) 9
3. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ  
(a) 72      (b) 158      (c) 243

#### 15.1.4 10ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

10 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ: 10, 20, 30, 40, 50, 60, .....ಮುಂತಾದವು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ '0'.

10 ರ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0 ಇದೆ, ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವೆಯಾ? ಹೌದು,

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ '0', ಅದು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

ಇದಕ್ಕಿರುವ ತಾರ್ಕಿಕ ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'c', ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'b', ನೂರರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'a' ಇರುವ ಒಂದು ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದನ್ನು  $100a + 10b + c = 10(10a + b) + c$  ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$10(10a + b)$ , 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. 'c', 10 ರ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಇದು  $c = 0$  ಆದಾಗ ಮಾತ್ರವೇ ಸಾಧ್ಯ.



**ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ :**

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೇ? ಇಲ್ಲವೇ? ತಿಳಿಸಿ.  
(a) 3860      (b) 234      (c) 1200      (d)  $10^3$       (e)  $10 + 280 + 20$
- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೇ? ಇಲ್ಲವೇ? ತಿಳಿಸಿ.  
(a)  $10^{10}$       (b)  $2^{10}$       (c)  $10^3 + 10^1$



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :**

- 56Z ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 6, ಆದರೆ Z ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 15.1.5 5ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

5 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅವು 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ..... ಮುಂತಾದವು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳು '0' ಅಥವಾ '5'

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ '0' ಅಥವಾ '5' ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

ಇದಕ್ಕೆ ಇರುವ ತಾರ್ಕಿಕ ಕಾರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'c', ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'b', ನೂರರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'a', ಇರುವ ಒಂದು ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಅದನ್ನು  $100a + 10b + c = 5(20a + 2b) + c$  ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$5(20a + 2b)$ , 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ  $c = 0$  ಅಥವಾ 5 ಆಗಬೇಕು.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೇ? ಇಲ್ಲವೇ? ತಿಳಿಸಿ.  
(a) 205      (b) 4560      (c) 402      (d) 105      (e) 235785

34A ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ A ಗೆ ಯಾವ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಇರಬಹುದು?

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ A ಇದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0 ಅಥವಾ 5 ಇರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ  $A = 0$  ಅಥವಾ 5.



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :**

1.  $4B$  ನ್ನು 5 ಭಾಗಿಸಿದರೆ '1' ಶೇಷ ಬರುವುದು, ಆದರೆ B ಗೆ ಯಾವ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಇರಬಹುದು?
2.  $76C$  ನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ 2, ಶೇಷ ಬರುವುದು. ಆದರೆ C ಗೆ ಯಾವ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಇರಬಹುದು?
3. “ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 10 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, 5 ರಿಂದ ಸಹ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.” ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸತ್ಯವೋ/ ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ಕಾರಣ ತಿಳಿಸಿರಿ.
4. “ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, '10' ರಿಂದ ಸಹ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.” ಈ ವಾಕ್ಯ ಸತ್ಯವೋ/ ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

### 15.1.6 2 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

2 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ : ಅವು 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ..... ಮುಂತಾದವು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಅವು 0, 2, 4, 6, 8 (ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಆಗುತ್ತಿವೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ (ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ) 0 ಅಥವಾ 2 ಅಥವಾ 4 ಅಥವಾ 6 ಅಥವಾ 8 ಇರಬೇಕು. ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಅದು ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಇದಕ್ಕಿರುವ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ನೂರರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ a, ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ b ಮತ್ತು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ c ಇರುವ ಮೂರಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $100 \times a + 10 \times b + c$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಇದನ್ನು  $2(50a + 5b) + c$  ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$2(50a + 5b)$ , 2 ರ ಅಪವರ್ತನ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅಂಕ c, 0 ಅಥವಾ 2 ಅಥವಾ 4 ಅಥವಾ 6 ಅಥವಾ 8 (ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಇರಬೇಕು.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**



1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಬರುವ ಶೇಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಮತ್ತು 1 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

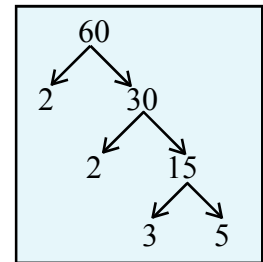
**ಉದಾಹರಣೆ 1:** 60 ಕ್ಕೆ ಇರುವ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 60 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ  $2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$$\therefore \text{ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ } (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$$

$$= 3 \times 2 \times 2 = 12$$

ಆ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60







## ಅಭ್ಯಾಸ - 15.1

1. ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳು 2, 5, 10 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ 'ಹೌದು' ಎಂದು ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದಿದ್ದರೆ 'ಇಲ್ಲ' ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯೆ	2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು	5ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು	10ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು
524	ಹೌದು	ಇಲ್ಲ	ಇಲ್ಲ
1200			
535			
836			
780			
3005			
4820			
48630			

2. ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನುಸಾರ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ತಿಳಿಸಿ.  
(a) 2144 (b) 1258 (c) 4336 (d) 633 (e) 1352
3. ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನುಸಾರ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ತಿಳಿಸಿ.  
(a) 438750 (b) 179015 (c) 125 (d) 639210 (e) 17852
4. ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನುಸಾರ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ತಿಳಿಸಿ.  
(a) 54450 (b) 10800 (c) 7138965 (d) 7016930 (e) 10101010
5. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(a) 18 (b) 24 (c) 45 (d) 90 (e) 105
6. 2, 5 ಮತ್ತು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಯಾವುದಾದರೂ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.
7. 34A ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಶೇಷ 1 ಆದರೆ A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 15.1.7 3 ಮತ್ತು 9 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 378 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. 378 ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು. = 300 + 70 + 8

$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$

ಇಲ್ಲಿ '3' ನ್ನು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾರವು

$$= (99 + 1) 3 + (9 + 1) 7 + 8$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದಾಗ

378

$$= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$

$$= 99 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$

$$= 3 (99 + 21) + (3 + 7 + 8)$$

3(99 + 21), 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕೆಂದರೆ (3 + 7 + 8) ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

**9ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :**

$$\begin{aligned} 378 \text{ ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆದರೆ} \quad 378 &= 300 + 70 + 8 \\ &= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8 \\ &= (99 + 1) 3 + (9 + 1) 7 + 8 \\ &= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8) \\ &= 9 (11 \times 3 + 1 \times 7) + (3 + 7 + 8) \\ &= 9 (33 + 7) + (3 + 7 + 8) \end{aligned}$$

9(33 + 7), 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ 3 + 7 + 8 ಮೊತ್ತ (ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ) 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

ಇದಕ್ಕಿರುವ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ:

ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'c', ಹತ್ತರಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'b', ನೂರರಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 'a' ಇರುವ 3 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $100a + 10b + c$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1)b + c = 99a + 9b + (a + b + c)$$

$$= 9(11a + b) + (a + b + c)$$

$$a + b + c \text{ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ}$$

9(11a + b) 3 ಮತ್ತು 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಅಥವಾ 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ  $a + b + c$  (ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ) 3 ಅಥವಾ 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

ಈ ನಿಯಮ 5 ಮತ್ತು 6 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸಹವರ್ತಿಸುವುದೇ? ಸರಿನೋಡಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ 2, 5 ಮತ್ತು 10 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ 3 ಮತ್ತು 9 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ, ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ :**

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ಅಥವಾ 9 ಅಥವಾ ಎರಡರಿಂದಲೂ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(a) 3663

(b) 186

(c) 342

(d) 18871

(e) 120

(f) 3789

(g) 4542

(h) 5779782

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** 24 P ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 1 ಮತ್ತು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 2 ಆದರೆ P ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 24 P ನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 2, ಆದ್ದರಿಂದ  $P = 2$  ಅಥವಾ 7 ಆಗಬೇಕು.

$P = 2$  ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ 2 ಆಗುವುದು. ಆದರೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ 1 ಆದ್ದರಿಂದ  $P = 7$  ಆಗಬೇಕು.



### ಅಭ್ಯಾಸ -15.2

1. 345 A 7 , 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ 'A' ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. 2791 A , 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ 'A' ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. 2,3,5,9 ಮತ್ತು 10 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.
4. 2A8 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ A ಗೆ ಎಷ್ಟು ಬೆಲೆಗಳು ಇರಬಹುದು? ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.
5. 50B, 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ , B ಗೆ ಇರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
6. 2P ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, P ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. 54Z, 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ 2 ಶೇಷ , ಬರುವುದು ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ 1 ಶೇಷ ಬರುವುದು. ಆದರೆ Z ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ?
8. 27Q, 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ 3 ಶೇಷ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ 1 ಶೇಷ ಬರುವುದು. ಆದರೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

#### 15.1.8 6ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

6, ರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ 24.

ಇದು 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

24 ,6 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾದ 2 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೇ ?

24 ರ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 4 (ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ) ಆದ್ದರಿಂದ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

24 ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ  $2 + 4 = 6$  ಆದ್ದರಿಂದ 24 ನ್ನು 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

ಈಗ 6 ರ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ, 6 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾದ 2 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು.

ಅಂದರೆ 2 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಆಗ 2 ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಆಗ 3 ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, 2 ಮತ್ತು 3 ಗಳು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ  $2 \times 3 = 6$  ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು.

6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ 2 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ತಪ್ಪದೆ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.



### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ :

- ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.?  
(a) 1632 (b) 456 (c) 1008 (d) 789 (e) 369 (f) 258
- ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.?  
(a)  $458 + 676$  (b)  $6^3$  (c)  $6^2 + 6^3$  (d)  $2^2 \times 3^2$

### 15.1.9 4 ಮತ್ತು 8ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

(a) ಒಂದು 4 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $1000a + 100b + 10c + d$  ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.  $1000a + 100b + 10c + d = 4(250a + 25b) + (10c + d)$ .  $4(250a + 25b)$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.  $4(250a + 25b)$ , 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ  $(10c+d)$ , 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನ, ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರ ಅಪವರ್ತನ ಇಲ್ಲವೇ '0' ಯಾಗಿರಬೇಕು.

4 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಕೊನೆಯ ಎರಡಂಕಗಳು ಹೊರತಾಗಿ ಉಳಿದ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರ ಅಪವರ್ತನ ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅವಕ್ಕೆ 4ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಕೊನೆಯ ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಗಮನಿಸಿರಿ?

(b) ಒಂದು ನಾಲ್ಕಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ  $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$  ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.  
 $= 1000a + 100b + 10c + d = 8(125a) + (100b + 10c + d)$

$8(125a)$ , 8 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕೆಂದರೂ  $(100b+10c+d)$ , 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಕೊನೆಯ ಮೂರಂಕಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ . ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಅಂಕಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಇಲ್ಲವೇ ಮೂರು ಅಂಕಗಳು '0' ಯಾಗಿರಬೇಕು.

4 ಅಂಕಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 8 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲವಾ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು 8 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವು ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಗಮನಿಸಿರಿ. .

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಅಂಕಗಳಿಂದ ಮೊದಲ ಎರಡಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಂತೆ, ಮೊದಲು ಮೂರು ಅಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಂತೆ, ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತೆ ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 9 ಅಂಕಗಳವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಲ್ಲರಾ?

ಪರಿಹಾರ: 123654987 ಕ್ರಮದ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ:** 6582 ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡಂಕಿಗಳು 82. 82, 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದು. ಆದ್ದರಿಂದ 6582, 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದು.

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** 28765432, 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಮೂರಂಕಿಗಳು 432. ಈ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 432, 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4 ರಿಂದ ಸಹ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು. 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೇ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ:**

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4 ಅಥವಾ 8 ಅಥವಾ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿಸಿ.
 

(a) 464	(b) 782	(c) 3688	(d) 100
(e) 1000	(f) 387856	(g) $4^4$	(h) $8^3$



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ:**

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4 ಅಥವಾ 8 ಅಥವಾ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.
 

(a) $4^2 \times 8^2$	(b) $10^3$	(c) $10^5 + 10^4 + 10^3$	(d) $4^3 + 4^2 + 4^1 - 2^2$
----------------------	------------	--------------------------	-----------------------------

### 15.1.10 7ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

ಒಂದು ಮೂರಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ  $100 \times a + 10 \times b + c$  ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$$100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಎರಡು ಪದಗಳಿಂದ 7 ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ

$$= 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$$

$7(14a + b)$ , '7' ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ,  $(2a + 3b + c)$ , 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** 364, 7 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ  $a = 3$ ,  $b = 6$ ,  $c = 4$ ,  $(2a + 3b + c) = 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4$

$$= 6 + 18 + 4 = 28 \text{ ( 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ '7' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.



ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ :

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.  
(a) 322 (b) 588 (c) 952 (d) 553 (e) 448



ಇವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ :

- ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು '7' ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.
- 3192, 7 ರ ಅಪವರ್ತನ ನಿನ್ನ ನಿಯಮದೊಂದಿಗೆ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

### 15.1.11 11 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ :

ಒಂದು 5 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $10000a + 1000b + 100c + 10d + e$  ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದನ್ನು 11 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಬರೆಯಲು, ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{aligned} &= (9999 + 1) a + (1001 - 1) b + (99 + 1) c + (11 - 1) d + e \\ &= 9999a + 1001 b + 99c + 11d + a - b + c - d + e \\ &= 11 (909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d) \\ &11 (909a + 91b + 9c + d) \text{ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.} \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ  $(a + c + e) - (b + d)$ , 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

ಅಂದರೆ  $(a + c + e) - (b + d)$ , 11 ಅಪವರ್ತನ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಸರಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 11 ರ ಅಪವರ್ತನ ಅಥವಾ 0 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯೆ	ಎಡಭಾಗದಿಂದ ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ	ಎಡಭಾಗದಿಂದ ಸರಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ	ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
308	$3 + 8 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$6 + 8 + 9 = 23$	$1 + 0 = 1$	$23 - 1 = 22$

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 0 ಅಥವಾ 11 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು.

5081 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ (ಬೆಸಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ) - (ಸರಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ)  $(5 + 8) - (0 + 1) = 12$ , ಇದು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದು. ಆದ್ದರಿಂದ 5081, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದು.



**ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ :**

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.  
(i) 4867216      (ii) 12221      (iii) 100001

ಯಾವುದಾದರೂ 3 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 123ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

123123 ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?  $1 + 3 + 2 = 6$

ಸರಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?  $2 + 1 + 3 = 6$

ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು? ಸೊನ್ನೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ 123123, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

ಒಂದು ಮೂರಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.



**ಇದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.**

- 789789, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
- 348348348348, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ?
- 135531 ಒಂದು ಸರಿ ಪಾಲಿಂಡ್ರೋಮ್ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ?
- 1234321, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ?



### ಅಭ್ಯಾಸ - 15.3

- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು '6' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿಸಿರಿ  
(a) 273432      (b) 100533      (c) 784076      (d) 24684
- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು '4' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿಸಿರಿ  
(a) 3024      (b) 1000      (c) 412      (d) 56240
- ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು '8' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿಸಿರಿ  
(a) 4808      (b) 1324      (c) 1000      (d) 76728

4. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು '7' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿಸಿ  
(a) 427 (b) 3514 (c) 861 (d) 4676
5. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು '11' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿಸಿ  
(a) 786764 (b) 536393 (c) 110011 (d) 1210121  
(e) 758043 (f) 8338472 (g) 54678 (i) 13431  
(j) 423423 (k) 168861
6. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ '8' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, '4' ರಿಂದಲೂ ಸಹ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ವಿವರಿಸಿ?
7. ಒಂದು ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ 4A3, ಮತ್ತೊಂದು ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ 984 ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ 13B7, ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದರೆ (A + B) ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 15.2 ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು

ನಾವು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

- (a) 24ರ ಅಪವರ್ತನ 12.

12 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1,2,3,4,6,12

24, 2,3,4,6 ಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 24, 12 ರ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

'a' ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 'b' ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಅದು 'b'ನ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.



- (b) ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 80 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದು 4 ಮತ್ತು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಮತ್ತು 5 ರ ಗುಣಲಬ್ಧ  $4 \times 5 = 20$  ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. (4 ಮತ್ತು 5 ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಇದೇ ರೀತಿ, 60, 3 ಮತ್ತು 5 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು. ಮತ್ತು 60, 3, 5 ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ( $3 \times 5 = 15$ ) ರಿಂದ ಸಹ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

'a' ಮತ್ತು 'b' ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ 'a' ಮತ್ತು 'b' ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ  $a \times b$  ರಿಂದಲೂ ಸಹ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.



('a' ಮತ್ತು 'b' ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗದೇ ಇದ್ದಾಗ ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ).

- (c) ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 16 ಮತ್ತು 20 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅವು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು. ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ  $16 + 20 = 36$  ಸಹ 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.  
16 ಮತ್ತು 20 ರ ಮತ್ತೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಕ್ಕೆ ಸರಿನೋಡಿರಿ.  
ಬೇರೊಂದು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಸರಿನೋಡಿರಿ..



“ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುವಾಗ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಹ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.”



- (d) ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 35 ಮತ್ತು 20ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅವು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು. ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ  $35 - 20 = 15$  ಸಹ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೇ? ಬೇರೊಂದು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಮೇಲಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಸರಿನೋಡಿ.

“ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕೂಡ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.”



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

1. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ನಾಲ್ಕು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸರಿನೋಡಿ.
2. 144, 12 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು 144, 12 ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
3.  $2^3 + 2^4 + 2^5$ , 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ. ವಿವರಿಸಿ.
4.  $3^3 - 3^2$ , 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ. ವಿವರಿಸಿ.

ಮೂರು ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿವುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾ.  $4 \times 5 \times 6 = 120$ . ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಮೂರು ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರ ಅಪವರ್ತನ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರು ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. :**

1.  $1576 \times 1577 \times 1578$  ಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೇ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ?

**ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 7 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ**

ಇದುವರೆಗೂ ನಾವು 3- ಅಂಕಗಳ, 4- ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 7 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 7 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

7538876849 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1 : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಲಭಾಗದಿಂದ ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಗುಂಪಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಕೊನೆಯ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳಿದ್ದರೂ ಅದನ್ನು ಒಂದು ಗುಂಪಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

7 | 538 | 876 | 849 |  
D C B A

ಹಂತ 2 : ಸರಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಗುಂಪುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಗುಂಪುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು. ಅಂದರೆ  $A + C$ ,  $B + D$ .

$$\begin{array}{r} 849 \\ + 538 \\ \hline 1387 \end{array} \quad \begin{array}{r} 876 \\ + 7 \\ \hline 883 \end{array}$$

ಹಂತ 3 : 883, 1387 ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

$$\begin{array}{r} 1387 \\ - 883 \\ \hline 504 \end{array}$$

7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

- ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಕಾರ, 10 ಅಂಕಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಸರಿಮೋಡಿರಿ.

ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನುಸಾರ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ತಿಳಿಯದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

84763A9 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ, 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ A ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

3 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ  $8 + 4 + 7 + 6 + 3 + A + 9 = 37 + A$ .

ಇದು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕಾದರೆ  $A = 2$  ಅಥವಾ 5 ಅಥವಾ 8 ಆಗಬೇಕು.



### ಅಭ್ಯಾಸ - 15.4

- 25110, 45 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
- 61479, 81 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
- 864, 36 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ. ಮತ್ತು 36ರ ಅಪವರ್ತನಗಳೆಲ್ಲವುಗಳಿಂದಲೂ 864 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
- 756, 42 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ ಮತ್ತು 42ರ ಅಪವರ್ತನಗಳೆಲ್ಲವೂಗಳಿಂದಲೂ 756 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.
- 2156, 11 ಮತ್ತು 7 ಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ನೋಡಿರಿ. ಮತ್ತು 2156, 11 ಮತ್ತು 7 ರ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
- 1435, 5 ಮತ್ತು 7 ಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ನೋಡಿರಿ. ಮತ್ತು 1435, 5 ಮತ್ತು 7 ರ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

7. 456, 618 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಹ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
8. 876, 345 ಗಳು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ತಿಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.
9.  $2^2+2^3+2^4$ ; 2, 4 ಅಥವಾ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೇ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.
10.  $32^2$ , 4 ಅಥವಾ 8 ಅಥವಾ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ?
11. A679B, 72 ರಿಂದ ನಿಶ್ಚೇಷವಾಗಿ ಬಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ A, Bಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 15.3 ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅಧರಿಸಿದ ಪಜಿಲ್ಸ್

ರಾಜು, ಸುಧ ಅಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಸಂಭಾಷಣೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಸುಧ : ಒಂದು 2 - ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೋ.

ರಾಜು : ಸರಿ, ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆ (ಅವನು 72 ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ).

ಸುಧ : ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡು.

ರಾಜು : ಸರಿ ಮಾಡಿದ್ದೇನೆ.

ಸುಧ : ಬಂದ ಉತ್ತರವನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 0 ಬರುವುದು.

ರಾಜು: ನಿಜ ನಿನಗೆ ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಿತು ?

ಸುಧ ಗೆ ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಿತು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.



ರಾಜು ಆಯ್ದುಕೊಂಡ ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $10a + b$  ("a" ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದೊಂದಿಗೆ "b" ಬಡಿಸ್ಥಾನದೊಂದಿಗೆ ಇವೆ)  $a \neq 0$  ಆಗಿರಲಿ. ಇದನ್ನು  $10 \times a + b = 10a + b$  ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಅವುಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ  $10b + a$ . ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿ  $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$  ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ 11 ರ ಅಪವರ್ತಕ ಆಗುವುದು. ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ  $(a + b)$ , (ಇದು a, b ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ) ಬೇರೆ ಇತರ 2- ಅಂಕಗಳ ಪಜಿಲ್ಸ್‌ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.



ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ :

1. ರಾಜು ಆಯ್ದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸರಿಮೋಡಿರಿ.  
(i) 37      (ii) 60      (iii) 18      (iv) 89
2. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡದಲ್ಲಿ 11 ಆಟಗಾರರು ಇದ್ದಾರೆ. ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಮಂಡಲಿ ಅವರಿಗೆ  $10x + y$  ಟೀಶರ್ಟ್ ಖರೀದಿಸಿದೆ. ಮತ್ತೆ ಮಂಡಳಿ  $10y + x$  ಟೀಶರ್ಟ್ ಖರೀದಿಸಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಟೀಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಸಮವಾಗಿ ಹಂಚಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ಟೀಶರ್ಟ್‌ಸ್ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ? ಒಬೊಬ್ಬರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಟೀಶರ್ಟ್ ಬರುತ್ತವೆ?

ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :



ಒಂದು ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ. ಬಂದ ಫಲಿತಾಂಶ ಯಾವಾಗಲೂ 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೇ?



ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ

1. ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ  $10a + b$  ( $a \neq 0$  ಮತ್ತು  $a > b$ ) ಹಣ್ಣುಗಳು ಇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ  $10b + a$  ಹಣ್ಣುಗಳು ಕೊಳೆತಿವೆ. ಉಳಿದ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು 9 ಜನರಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಹಂಚಬಹುದೇ? ಒಬೊಬ್ಬರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ್ಣುಗಳು ಬರುತ್ತವೆ?

15.4 3- ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಆಟ

ಸುಧಾ : ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದು ಕೋ

ರಾಜು : ಸರಿ (ಅವನು ಅಂದು ಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆ 157)

ಸುಧಾ : ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆಯಿರಿ.

ರಾಜು : ಸರಿ

ಸುಧಾ : ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 9 ಅಥವಾ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 0 ಬರುವುದು

ರಾಜು : ನಿಜವೇ ನಿನಗೆ ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಿತು.

ಸುಧಾಗೆ ಹೇಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೆಂದು ಗಮನಿಸೋಣ.

ರಾಜು ಆಯ್ದುಕೊಂಡ 3- ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $100a + 10b + c$  ಆಗಿರಲಿ. ಅದರಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಲಾಗಿ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆ  $100c + 10b + a$ .

$$(a > c) \text{ ಆದರೆ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ } (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) \\ = 9 \times 11 \times (a - c)$$



$$\begin{aligned}
(c > a) \text{ ಆದರೆ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ } & (100c + 10b + a) - (100a + 10b + a) \\
& = 99c - 99a \\
& = 99(c - a) \\
& = 9 \times 11 \times (c - a)
\end{aligned}$$

ಮತ್ತು  $a = c$ , ಆದರೆ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ '0'

ಇವು 9 ಮತ್ತು 11ರ ಅಪವರ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ  $(a - c)$ ,  $(c - a)$ .



ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ :

1. ಮೇಲಿನ ಪಜಿಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ  
(i) 657      (ii) 473      (iii) 167      (iv) 135



ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅದರ ಅಂಕಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಾ (ABC, BCA, CAB) ಆಗುವಂತೆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ. ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಬಂದ ಫಲಿತಾಂಶ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

### 15.5 ತಪ್ಪಿಹೋದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು :

ಕೆಲವು ಪಜಿಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು. ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳು. ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳು ಆಧಾರವಾಗಿ ತಪ್ಪಿಹೋದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಇದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ 3 ನಿಯಮಗಳು ಇವೆ.

1. ಪ್ರತಿ ಅಕ್ಷರ ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.
2. ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 0 ಆಗದು.
3. ಪಜಿಲ್‌ಗೆ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಇರುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕಲನದಿಂದ A ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{array}{r}
17A \\
+ 2A4 \\
\hline
407
\end{array}$$

**ಪರಿಹಾರ :** ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿ  $A + 4 = 7$ . ಅಥವಾ  $100 + 70 + A$   
 ಆದ್ದರಿಂದ  $A = 3$   $\frac{200 + 10A + 4}{300 + 70 + 11A + 4} = 407$   
 $173 + 234 = 407$   $11A = 33$   
 $A = 3$

**ಉದಾಹರಣೆ 7 :** ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿರುವ  $M$  ಮತ್ತು  $Y$  ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.  $Y + Y + Y = MY$

**ಪರಿಹಾರ :**  $Y + Y + Y = MY$   
 $3Y = 10M + Y$   
 $2Y = 10M$   
 $M = \frac{Y}{5}$  (i.e.  $Y, 5$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ  $Y = 0$  ಅಥವಾ  $5$ )

ಮೇಲಿನವುಗಳಿಂದ  $Y = 0$ , ಆದರೆ  $Y + Y + Y = 0 + 0 + 0 = 0$ ,  $M = 0$

$Y = 5$ , ಆದರೆ  $Y + Y + Y = 5 + 5 + 5 = 15$ ,  $MY = 15$  ಆದ್ದರಿಂದ  $M = 1, Y = 5$

**ಉದಾಹರಣೆ 8:**  $A2 - 15 = 5A$ ,

**ಪರಿಹಾರ :**  $2 - 5 = a$  ಇದು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಅಥವಾ  $(10A + 2) - (10 + 5) = 50 + A$   
 $12 - 5 = 7$ , ಆಗಬೇಕು.  $10A - 13 = 50 + A$   
 ಆದ್ದರಿಂದ  $A = 7$   $9A = 63$   
 $A = 7$

**ಉದಾಹರಣೆ 9:**  $5A1 - 23A = 325$

**ಪರಿಹಾರ :**  $1 - A = 5$  ಆಗಲು (ಅಥವಾ)  $(500 + 10A + 1) - (200 + 30 + A) = 325$   
 i.e.  $11 - A = 5$ ,  $501 - 230 + 10A - A = 325$   
 ಆದ್ದರಿಂದ  $A = 6$   $271 + 9A = 325$   
 $271 + 9A = 325$   
 $271 - 271 + 9A = 325 - 271$   
 $9A = 54$   
 $A = 6$

**ಉದಾಹರಣೆ 10:**  $1A \times A = 9A$  ನಲ್ಲಿ  $1A$  ಮತ್ತು  $9A$ ಗಳು ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ  $A$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $A \times A = A$  ಅಥವಾ  $(10 + A)A = (90 + A)$   
 $1, 5, 6$  ವರ್ಗ ಪಟ್ಟಿಗಳಿಂದ  $10A + A^2 = 90 + A$   
 $1 \times 1 = 1,$   $A^2 + 9A - 90 = 0$   
 $5 \times 5 = 25,$   $A^2 + 2.A\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 90 = 0$   
 $6 \times 6 = 36,$   
 $A = 6,$   $\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - 90 = 0$   
 $16 \times 6 = 96$   $\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$   
 $A + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$   
 $A = \frac{12}{2} = 6$

**ಉದಾಹರಣೆ 11 :**  $BA \times B3 = 57A$  ಗಳಲ್ಲಿ  $BA, B3$ ಗಳು ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು  $57A$  ಒಂದು ಮೂರಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ  $A, B$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಪಟ್ಟಿಗಳಿಂದ, ಯತ್ನದೊಷ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದು  
 $A \times 3 = A.$  ಆಗಬೇಕೆಂದರೆ  $A = 0$  ಅಥವಾ  $5$  ಆಗಬೇಕು. ( $0 \times 3 = 0, 5 \times 3 = 15$ )  
 ಆದ್ದರಿಂದ  $A = 0$  ಅಥವಾ  $5$  ಆಗಬೇಕು. ಈಗ  $10$ ರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಎರಡಂಕಗಳು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆ  $19.$  ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ  $19 \times 19 = 361.$   $57A$  ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ.  
 ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ  $3$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಎರಡಂಕಗಳ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬೆಲೆ  $30.$   
 ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ  $30 \times 30 = 900$   $57A$  ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದ್ದರಿಂದ ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ  $2$  ಇರುತ್ತದೆ.  
 $20 \times 23 = 460$  ಮತ್ತು  $25 \times 23 = 575.$   
 ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಿಯಾದ ಫಲಿತಾಂಶ  $25 \times 23 = 575.$



ಇವನ್ನು ಮಾಡಿ :

1.  $21358AB, 99$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ,  $A, B$  ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2.  $4AB8$  ಕ್ರಮವಾಗಿ  $2, 3, 4, 6, 8$  ಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ  $A, B$  ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ 12:** ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ  $A, B, C$  ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $B = 0$  ಅಥವಾ  $1$  ಅಥವಾ  $5$  ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ  $0 \times 5 = 0,$   $1 \times 5 = 5, 5 \times 5 = 25$   $\frac{AB}{\times 5}$   
 $B = 0,$  ಆದರೆ  $A 0 \times 5 = CA0$   $CAB$

ಈಗ  $A = 5$ , ಆಗ  $50 \times 5 = 250$

$\therefore CAB = 250$ .



ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ:

1.  $YE \times ME = TTT$  ಆದರೆ  $Y + E + M + T$  ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.  
[ಸೂಚನೆ :  $TTT = 100T + 10T + T = T(111) = T(37 \times 3)$ ]
2. 88 ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ  $A733B$  ಆದರೆ  $A, B$  ಬೆಲೆಗಳು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



### ಅಭ್ಯಾಸ -15. 5

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕಲನಗಳಲ್ಲಿ ತಪ್ಪಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
 

(a) $\begin{array}{r} 111 \\ + A \\ + 77 \\ \hline 197 \end{array}$	(b) $\begin{array}{r} 222 \\ + 8 \\ + BB \\ \hline 285 \end{array}$	(c) $\begin{array}{r} A A A \\ + A A \\ \hline 373 \end{array}$	(d) $\begin{array}{r} 2222 \\ + 99 \\ + 9 \\ \hline A A A \\ \hline 299A \end{array}$	(e) $\begin{array}{r} B B \\ + A A A \\ \hline 461 \end{array}$
---	---	---	---	---
2. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯವಕಲನಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ  $A$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 

(a)  $7A - 16 = A9$     (b)  $107 - A9 = 1A$     (c)  $A36 - 1A4 = 742$
3. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಕಾರಗಳಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 

(a) $\begin{array}{r} \boxed{D} \boxed{E} \\ \times 3 \\ \hline \boxed{F} \boxed{D} \boxed{E} \end{array}$	(b) $\begin{array}{r} \boxed{G} \boxed{H} \\ \times 6 \\ \hline \boxed{C} \boxed{G} \boxed{H} \end{array}$
--	--
4. ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟುಹೋದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 

(a)  $73K \div 8 = 9L$     (b)  $1MN \div 3 = MN$
5.  $ABB \times 999 = ABC123$  ( $A, B, C$  ಗಳು) ಆದರೆ  $A, B, C$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### 15.6 ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವದರ ಮೂಲಕ ಬರುವ ಶೇಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷಗಳು

$$1000 \div 7 \quad (\text{ಶೇಷ } 6. \text{ ಇದನ್ನು } 6 - 7 = -1 \text{ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು})$$

$$100 \div 7 \quad (\text{ಶೇಷ } 2)$$

$$10 \div 7 \quad (\text{ಶೇಷ } 3)$$

$$1 \div 7 \quad (\text{ಶೇಷ } 1)$$



ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆ	$10^8$	$10^7$	$10^6$	$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$
7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ	3	2	1	-2	-3	-1	2	3	1

562499 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅಂಕಗಳು	5	6	2	4	9	9
ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳು	$5 \times 10^5$	$6 \times 10^4$	$2 \times 10^3$	$4 \times 10^2$	$9 \times 10^1$	$9 \times 10^0$
7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ	$5 \times (-2)$	$6 \times (-3)$	$2 \times (-1)$	$4 \times 2$	$9 \times 3$	$9 \times 1$

ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳ ಶೇಷಗಳನ್ನು ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ

$$-10 - 18 - 2 + 8 + 27 + 9 = -30 + 44 = 14$$

14,7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 562499 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.



**ಇವನ್ನು ಮೂಡಿರಿ :**

- ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, 7810364 ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
- ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 963451, 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

### 15.7 ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು:

**ಉದಾಹರಣೆ 13:** ಸರಿ ಪಾಲಿಂಡ್ರೋಮ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, '11' ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವೋ ಇಲ್ಲವೋ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 12344321 ಗಳಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸರಿ ಪಾಲಿಂಡ್ರೋಮ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ =  $1 + 3 + 4 + 2$ . ಸರಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ =  $2 + 4 + 3 + 1$ . ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 0. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಿ ಪಾಲಿಂಡ್ರೋಮ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು.

**ಉದಾಹರಣೆ 14:**  $10^{1000} - 1$  ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಮತ್ತು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $10^{1000} - 1$  ನ್ನು 999 .... 999 (1000 ಬಾರಿ) ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ 9 ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು ಮತ್ತು ಇದರಲ್ಲಿ 1000 ಅಂಕಗಳು ಇರುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ, ಬೆಸ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ಸಹ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ:**



- $10^{2n} - 1$ , 9 ಮತ್ತು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲೆವೇ? ವಿವರಿಸಿರಿ.
- $10^{2n+1} - 1$ , 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೇ ಇಲ್ಲವೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ15:** ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಅಂಕಗಳು ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೇ ನೋಡಿರಿ. ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಒಂದು ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 47 ಆಗಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ 474747.

474747 ನ್ನು 47(10101) ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. 10101 , 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ  $1 + 1 + 1 = 3$ . ಆದ್ದರಿಂದ 474747 , 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ16:** ಒಂದು ಮೂರಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ಬಾರಿ ಬರೆದು 6 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ಮತ್ತು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಸರಿನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಯಾವುದಾದರೊಂದು 3-ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 345 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 345345.

$$345345 = 345000 + 345 = 345 (1000 + 1) \text{ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.}$$

$$= 345 (1001)$$

$$= 345 (7 \times 11 \times 13)$$

ಆದ್ದರಿಂದ 345345 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 7, 11 ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.



**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. 456456456456 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 7, 11 ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ17:** ಒಂದೇ ಅಂಕ ಉಳ್ಳ ಒಂದು 3- ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದನ್ನು ಅದರ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ [reduced number] ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಒಂದೇ ಅಂಕ ಇರುವ 3 - ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 444 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ  $4 + 4 = 12$   
 $444 \div 12 = 37$  ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 333 , 666 ಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.  
 ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ 37 ಬರುವುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ18:**  $2^3 + 3^3$  ,  $(2 + 3)$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ  $2^3 + 3^3 = (2 + 3)(2^2 - 2 \times 3 + 3^2)$  ಆಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು  $(2 + 3)$  ರ ಅವಶ್ಯಕ

ಆದ್ದರಿಂದ  $2^3 + 3^3$  ,  $(2 + 3)$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :**



1.  $a^5 + b^5$ ,  $(a + b)$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ 'a', 'b' ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

2.  $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$  ,  $(a + b)$  ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲೆವೇ?

### 15.8 ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ:

ನಾವು 1 ರಿಂದ 100 ವರೆಗೆ ಇರುವ ಅನುಕ್ರಮ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡದೇ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + 3 + \dots + 50 + 51 + \dots + 98 + 99 + 100 \\
 &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) \\
 &= 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \quad (50 \text{ ಬಾರಿ}) = 50 \times 101 = 5050 \\
 &= \frac{100 \times 101}{2} = 5050.
 \end{aligned}$$

100 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬೇಕಾದರೆ

'n' ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬೇಕಾದರೆ  $\frac{n(n+1)}{2}$  ಆಗುವುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ 19:** 50 ರಿಂದ 85 ವರೆಗೆ ಇರುವ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ :** 50 ರಿಂದ 85 ವರೆಗೆ ಇರುವ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ = (1 ರಿಂದ 85 ವರೆಗೆ ಇರುವ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ) - (1 ರಿಂದ 49 ವರೆಗೆ ಇರುವ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ)

$$\begin{aligned}
 &= (5 + 10 + \dots + 85) - (5 + 10 + \dots + 45) \\
 &= 5(1 + 2 + \dots + 17) - 5(1 + 2 + \dots + 9) \\
 &= 5 \times \left( \frac{17 \times 18}{2} \right) - 5 \times \left( \frac{9 \times 10}{2} \right) \\
 &= 5 \times 9 \times 17 - 5 \times 9 \times 5 \\
 &= 5 \times 9 \times (17 - 5) \\
 &= 5 \times 9 \times 12 = 540
 \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 20:** 1 ರಿಂದ 100 ವರೆಗೆ ಇರುವ 2 ಅಥವಾ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 1 ರಿಂದ 100 ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2, 4, ... 98, 100.

1 ರಿಂದ 100 ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3, 6, ... 96, 99.

ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬಂದಿವೆ. ಅವು 2 ಮತ್ತು 3 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಆದರೆ 6ರ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳು.

1 ರಿಂದ 100 ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 2 ಅಥವಾ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = (1 ರಿಂದ 100 ರ ವರೆಗೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) + (1 ರಿಂದ 100 ರ ವರೆಗೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) - (6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

$$\begin{aligned}
 &= (2 + 4 + \dots + 100) + (3 + 6 + \dots + 99) - (6 + 12 + \dots + 96) \\
 &= 2(1 + 2 + \dots + 50) + 3(1 + 2 + \dots + 33) - 6(1 + 2 + \dots + 16) \\
 &= 2 \times \left( \frac{50 \times (50+1)}{2} \right) + 3 \times \left( \frac{33 \times (33+1)}{2} \right) - 6 \times \left( \frac{16 \times (16+1)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \times \left( \frac{50 \times 51}{2} \right) + 3 \times \left( \frac{33 \times 34^{17}}{2} \right) - 6 \times \left( \frac{8 \times 16 \times 17}{2} \right) \\
&= 2550 + 1683 - 816 \\
&= 4233 - 816 = 3417
\end{aligned}$$



### ಅಭ್ಯಾಸ - 15.6

- 1 ರಿಂದ 100 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 11 ರಿಂದ 50 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 11 ರಿಂದ 50 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2 ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- $(n^3 - n)$ , 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ವಿವರಿಸಿರಿ.
- 'n' ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (n ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ), n ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು. ಕಾರಣ ತಿಳಿಸಿರಿ.
- $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11}$ , 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೇ? ವಿವರಿಸಿ.
- |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಆಯತಗಳಿವೆ?
- ರಾಹುಲ್ ತಂದೆ, ರಾಹುಲ್ ಹುಟ್ಟಿದನಂದು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಸ್ವಲ್ಪ ಹಣವನ್ನು ಬ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿ ಠೇವಣಿ ಮಾಡುತ್ತಿರುವರು. ಅವನ ಮೊದಲ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದಂದು ₹100, ಎರಡನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದಂದು ₹300, ಮೂರನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದಂದು ₹600, 4ನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದಂದು ರೂ. ₹1000 ದಂತೆ ಠೇವಣಿ ಮಾಡುತ್ತಾ ಹೋಗುವರು. ಆದರೆ ಅವನ 15ನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದಂದು ಎಷ್ಟು ಠೇವಣಿ ಮಾಡಿರುತ್ತಾನೆ?
- 1 ರಿಂದ 100 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 2 ಅಥವಾ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 11 ರಿಂದ 1000 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



### ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. ಒಂದು 3- ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $100a + 10b + c$ . ಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ  $a \neq 0$  ಗಳು 0 ಯಿಂದ 9 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಅಂಕಗಳು.
2. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಬಗ್ಗೆ
3. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. ರ ಭಾಜ್ಯತೆಯ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ತಾರ್ಕಿಕ ಕಾರಣಗಳನ್ನು
4. ಅಂಕಗಳ ಪಜಿಲ್ ಮತ್ತು ಆಟಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

## ಉತ್ತರಗಳು



### 1. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

#### ಅಧ್ಯಾಯ - 1.1

I.

(i) ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತೆ

(ii) ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ

(iv) ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತೆ

(vi) ಗುಣಾಕಾರದ ಆವೃತ ನಿಯಮ

(viii) ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ

(iii) ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತೆ

(v) ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ

(vii) ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ ನಿಯಮ

(ix) ವಿಭಾಜಕ

2. (i)  $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}$  (ii)  $-1, 1$  (iii)  $0$ , ನಿರ್ವಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ (iv)  $\frac{-7}{9}, \frac{9}{7}$

(v)  $1, -1$

3. (i)  $\frac{-12}{5}$  (ii)  $0$  (iii)  $\frac{9}{11}$  (iv)  $\frac{6}{7}$

(v)  $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$  (vi)  $0$  4.  $\frac{-28}{55}$

5. ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ, ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತೆ, ಸಂಕಲನದ ಆವೃತ ಗುಣ.

7.  $\frac{28}{15}$  8. (i)  $\frac{-5}{12}$  (ii)  $\frac{58}{13}$  (iii)  $\frac{45}{7}$

9.  $\frac{-7}{8}$  10.  $\frac{53}{6}$

11. ಸಹವರ್ತನೀಯ ಅಲ್ಲ ಆದುದರಿಂದ  $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

13. (i) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ii)  $0$  (iii) ಋಣಾತ್ಮಕ

## ಅಧ್ಯಾಯ - 1.3

1. (i)  $\frac{57}{100}$  (ii)  $\frac{22}{125}$  (iii)  $\frac{100001}{100000}$  (iv)  $\frac{201}{8}$   
 2. (i) 1 (ii)  $\frac{19}{33}$  (iii)  $\frac{361}{495}$  (vi)  $\frac{553}{45}$   
 3. (i)  $\frac{7}{13}$  (ii)  $\frac{-7}{5}$   
 4.  $-\frac{62}{65}$  5. 140 6.  $5\frac{1}{10}$  ಮೀ 7. ₹. 1.66  
 8.  $161\frac{1}{5}$  ಮೀ<sup>2</sup> 9.  $\frac{3}{4}$  10.  $\frac{16}{9}$  ಮೀ 11. 125



## 2. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

## ಅಧ್ಯಾಯ - 2.1

- 1.(i) 2 (ii) -3 (iii) -6 (iv) 6  
 (v)  $\frac{-3}{2}$  (vi) -21 (vii) 27 (viii) 5  
 (ix)  $\frac{7}{3}$  (x) 1 (xi)  $\frac{1}{2}$  (xii) 0  
 (xiii)  $\frac{25}{7}$  (xiv)  $\frac{21}{16}$  (xv)  $\frac{8}{3}$  (xvi)  $\frac{13}{6}$

## ಅಧ್ಯಾಯ - 2.2

- 1.(i)  $67^0$  (ii)  $17^0$  (iii)  $125^0$  (iv)  $19^0$   
 (v)  $20^0$   
 2. 5 3. 43, 15 4. 27, 29  
 5. 252, 259, 266 6. 20 ಕಿ.ಮೀ 7. 99ಗ್ರಾಂ, 106ಗ್ರಾಂ, 95ಗ್ರಾಂ 8. 113ಮೀ, 87ಮೀ  
 9. 16ಮೀ, 12ಮೀ 10. 21ಮೀ, 21ಮೀ, 13ಮೀ 11.  $39^0$   
 12. 20 ವರ್ಷಗಳು, 38 ವರ್ಷಗಳು  
 13. 126 14. 80, 10 15. 60, 48 16. 59 ಅಡಿ, 29.5 ಅಡಿ  
 17. 186, 187.

## ಅಧ್ಯಾಯ - 2.3

- |                   |                    |                   |                   |
|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| 1. 1              | 2. 2               | 3. $\frac{11}{4}$ | 4. -1             |
| 5. $\frac{-9}{5}$ | 6. 1               | 7. 7              | 8. $\frac{-4}{7}$ |
| 9. $\frac{9}{2}$  | 10. $\frac{11}{3}$ | 11. 1             | 12. -96           |
| 13. 3             | 14. 8              |                   |                   |

## ಅಧ್ಯಾಯ - 2.4

- |       |         |       |               |
|-------|---------|-------|---------------|
| 1. 25 | 2. 7    | 3. 63 | 4. 40, 25, 15 |
| 5. 12 | 6. 4, 2 | 7. 16 | 8. 10,000     |

## ಅಧ್ಯಾಯ - 2.5

- |                        |              |  |                       |
|------------------------|--------------|--|-----------------------|
| 1.(i) $\frac{145}{21}$ | (ii) 168     | (iii) 12                                     | (iv) 25               |
| (v) $\frac{127}{12}$   | (vi) 1       | (vii) $\frac{9}{2}$                          | (viii) $\frac{5}{12}$ |
| (ix) $\frac{9}{23}$    | (x) -1       | (xi) $\frac{-1}{7}$                          | (xii) $\frac{3}{7}$   |
| 2. 30                  | 3. 48, 12    | 4. $\frac{3}{7}$                             | 5. 50, 51, 52         |
| 6. 25                  | 7. 5         | 8. ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಗಳು : 14; 50ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯಗಳು = 42 |                       |
| 9. 30 ದಿನಗಳು           | 10. 20 ಕಿ.ಮೀ | 11. 36                                       |                       |
| 12. 860                | 13. 16       |  |                       |

## 4. ಘಾತಾಂಕಗಳು

## ಅಧ್ಯಾಯ - 4.1

- |                                       |                    |                       |                          |
|---------------------------------------|--------------------|-----------------------|--------------------------|
| 1.(i) $\frac{1}{64}$                  | (ii) -128          | (iii) $\frac{64}{27}$ | (iv) $\frac{1}{81}$      |
| 2.(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ | (ii) $(-2)^{14}$   | (iii) $5^4$           | (iv) $5^5$ (v) $(-21)^4$ |
| 3.(i) $2^4 \times 3$                  | (ii) $\frac{1}{2}$ |                       |                          |

- 4.(i) 10 (ii)  $40^3$  (iii)  $\frac{13}{16}$  (iv)  $\frac{2}{81}$
- (v)  $\frac{17}{6}$  (vi)  $\frac{16}{81}$  5. (i) 625 (ii) 625
- 6.(i) 10 (ii) -10 (iii) 2 7. 3
8.  $\frac{4^5}{3^4 \times 5}$  9. (i) 1 (ii) 72 (iii) -24
10.  $\frac{16}{49}$

### ಅಧ್ಯಾಯ - 4.2

- 1.(i)  $9.47 \times 10^{-10}$  (ii)  $5.43 \times 10^{11}$  (iii)  $4.83 \times 10^7$  (iv)  $9.298 \times 10^{-5}$
- (v)  $5.29 \times 10^{-5}$
- 2.(i) 4,37,000 (ii) 5,80,00,000 (iii) 0.00325 (iv) 37152900
- (v) 0.03789 (vi) 0.02436
- 3.(i)  $4 \times 10^{-7}$  ಮೀ (ii)  $7 \times 10^{-6}$  ಮಿ.ಮೀ (iii)  $3 \times 10^8$  ಮೀ/ಸೆಂ (iv)  $3.84467 \times 10^8$
- (v)  $1.6 \times 10^{-19}$  ಕುಲಂಪ್ಸ್ (vi)  $1.6 \times 10^{-3}$  ಸೆಂ.ಮೀ (vii)  $5 \times 10^{-6}$  ಸೆಂ.ಮೀ
4.  $1.0008 \times 10^2$  ಮಿ.ಮೀ
- 5.(i) ಅಲ್ಲ (ii) ಅಲ್ಲ (iii) ಅಲ್ಲ (iv) ಅಲ್ಲ (v) ಅಲ್ಲ

### 5. ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು

### ಅಧ್ಯಾಯ - 5.1

- 1.(i) 3:4 (ii) 32:3 (iii) 1:2 2. (i) 168
3. 8 4. 48 5. 20 6.  $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$
7. 3:5 8. 1 : 3 ಇಲ್ಲವೇ 4 : 7 9. ₹8320
10.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ , ಹೌದು 11. ₹. 28.5, ₹. 92, ₹. 257.6, ₹. 132, ₹. 88
12. (a) 83 (b) 1992 ಜನ 13. 2064 ಚೀಲಗಳು 14. 70 ಸೆಂ. ಮೀ



## ಅಧ್ಯಾಯ - 5.2

1. 81.9 ಕೋಟಿಗಳು
2. 2756.25
3. ₹. 27.67
4.  $3 \times 6$  ಸಂ.ಮೀ
5. ₹ 127.50
6.  $6\frac{1}{4}\%$
7. 17%
8. ₹.880, 10%, ₹.4,000, 20%, ₹.10,000, 20%, ಅಭ, ₹.392, ₹.42, ₹. 315, ₹.35.
9. ₹.2244
10. ₹1250
11. 40,000 ; 12.5%12. ₹30,0017.64% ಅಭ
13. ₹.1334
14. (i) ₹9999 (ii) ₹2,793 (iii) ₹.195.80(ಸರಿಸುಮಾರು)
15. (i) ₹540 (ii) ₹ 5040 16.13

## ಅಧ್ಯಾಯ - 5.3

1. (a) 6,34,500 (b) ₹10,575 2. (i) 3. A = ₹8820, ₹820
4. ₹.7234.50 5. ₹.1311.12 6. 81,82,199 7. ₹.11080.50
8. (i) ₹210 (ii) ₹1450 9. ₹.43.20 10. 5,31,616
11. ₹. 36659.70 12. ₹.362.50 ಭಾರತಿ 13. ₹.9500
14. 1297920 15. ₹.103.81



## 6.ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಘನ ಮೂಲಗಳು

## ಅಧ್ಯಾಯ - 6.1

- 1.(i) 39 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 1
- (ii) 297 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 9
- (iii) 5125 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 5
- (iv) 7286 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 6
- (v) 8742 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 4
2. ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳು
  - (i) 121 (ii) 256
- 3.(i) 257 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 7 ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.
- (ii) 4592 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 2 ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.
- (iii) 2433 ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 3 ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.
- (iv) 5050 ನಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 0 ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊನೆಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು 0 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.
- (v) 6098 ನಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ 8 ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.
4. (i)  $431^2$  - ಬೆಸ (ii)  $2826^2$  - ಸರಿ (iii)  $8204^2$  - ಸರಿ
- (iv)  $17779^2$  - ಬೆಸ (v)  $99998^2$  - ಸರಿ

5. (i) 50 (ii) 112 (iii) 214

6. (i) 25 (ii) 81 (iii) 169

**ಅಧ್ಯಾಯ - 6.2**

1. (i) 21 (ii) 28 (iii) 64 (iv) 84

2. 5 3. 6. 120 4. 6 5. 39

6. 31 7. 144, 9 8. 89 9. 4608 ಮೀ<sup>2</sup>

**ಅಧ್ಯಾಯ - 6.3**

1. (i) 33 (ii) 48 (iii) 88 (iv) 78

(v) 95

2. (i) 1.6 (ii) 4.3 (iii) 8.3 (iv) 9.2

3. 31 4. 67 ಸೆಂ.ಮೀ 5. 91 6. 1024

7. 149 8. (i) 10 (ii) 16 (iii) 28

**ಅಧ್ಯಾಯ - 6.4**

1. (i) 512 (ii) 4096 (iii) 9261 (iv) 27000

2. i) 243 - ಪೂರ್ಣಘನ ಅಲ್ಲ ii) 516 - ಪೂರ್ಣಘನ ಅಲ್ಲ

iii) 729 - ಪೂರ್ಣಘನ vi) 8000 - ಪೂರ್ಣಘನ

v) 2700 - ಪೂರ್ಣಘನ ಅಲ್ಲ

3. 2 4. 17 5. 5 6. 6

**ಅಧ್ಯಾಯ - 6.5**

1. (i) 7 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 14

1. (i) 16 (ii) 13 (iii) 15 (iv) 18

3. i) ತಪ್ಪು ii) ತಪ್ಪು iii) ಸರಿ

vi) ತಪ್ಪು v) ತಪ್ಪು vi) ತಪ್ಪು



**7. ಅವತ್ತಿ ವಿರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಗಳು**

**ಅಧ್ಯಾಯ 7.1**

1. ₹.11060.83 2.  $\bar{x} = 7$  3.  $\bar{x} = 27$  4.  $\bar{x} = 43$

5.  $\bar{x} = 30$  ವರ್ಷಗಳು 6. 52 ವರ್ಷಗಳು

7.  $\bar{x} = 12$  ವಿಚಲನೆಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ  $\bar{x} = 0$

8. 5                      9.  $\bar{x} = 13.67$  ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಮ                      10. 15.3 ಅಂಕಗಳು  
 11.  $\bar{x} = 30$                       12. ಮಧ್ಯಾಂಕ = 3.4                      13.  $x = 18$   
 14. ಬಹುಳಕ = 10                      15. ಬಹುಳಕ =  $x - 3$                       16. ಬಹುಳಕ = 1  
 17. 12, 16, 16, 16                      18. 42                      19. 8                      20. 20

ಅಧ್ಯಾಯ - 7.2

1. ವರ್ಗಾಂತರ                      5-14                      15-24                      25-34                      35-44                      45-54                      55-64  
 ಆವೃತ್ತಿ                      9                      9                      9                      6                      7                      5  
 2. ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು                      15-19                      19-23                      23-27                      27-31                      31-35                      35-39                      39-43  
 ಆವೃತ್ತಿ                      5                      7                      6                      5                      5                      1                      1  
 3. ವರ್ಗಾಂತರ                      4-11                      12-19                      20-27                      28-35                      36-43                      44-51                      52-59  
 ಸೈಜ ವರ್ಗಾಂತರ                      3.5-11.5                      11.5-19.5                      19.5-27.5                      27.5-35.5                      35.5-43.5                      43.5-51.5                      51.5-59.5

4. ವರ್ಗದ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತಿ	ವರ್ಗಾಂತರ	ಆರೋಹಣ	ಅವರೋಹಣ
10	6	4-16	6	75
22	14	16-28	20	69
34	20	28-40	40	55
46	21	40-52	61	35
58	9	52-64	70	14
70	5	64-76	75	5

5. ವರ್ಗಾಂತರ (ಅಂಕಗಳು)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆವೃತ್ತಿ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು)	2	10	4	9	10

6. ವರ್ಗಾಂತರ (ವಯಸ್ಸು)	ಆವೃತ್ತಿ (ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ವರ್ಗಾಂತರ ಸರಹದ್ದುಗಳು	ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
1 - 3	10	0.5 - 3.5	10	59
4 - 6	12	3.5 - 6.5	22	49
7 - 9	15	6.5 - 9.5	37	37
10 - 12	13	9.5 - 12.5	50	22
13 - 15	9	12.5 - 15.5	59	9

7. ವರ್ಗಾಂತರ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆರೋಹಣ ಸಂ.ಆ	3	8	19	25	30
ಆವೃತ್ತಿ	3	5	11	6	5

ಕೊಟ್ಟವು ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ

8. ವರ್ಗಾಂತರ	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
ಅವರೋಹಣ ಸಂ.ಆ	42	36	23	14	6
ಆವೃತ್ತಿ	6	13	9	8	6



### 8. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಿತ್ರಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ

#### ಅಧ್ಯಾಯ - 8.1

- (a) ಸರಿ (b) ತಪ್ಪು (c) ತಪ್ಪು (d) ತಪ್ಪು  
(e) ತಪ್ಪು (f) ತಪ್ಪು (g) ತಪ್ಪು
- (a) ಹೌದು, ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರೂಪಗಳು  
(b) ಹೌದು, ಸರೂಪಕತೆ ಸ್ಥಿರ
- AB = NM;  $\angle A = \angle N$   
BC = MO;  $\angle B = \angle M$   
CA = ON;  $\angle C = \angle O$
- (i) ಸರಿ (ii) ಸರಿ (iii) ಸರಿ (iv) ತಪ್ಪು  
(v) ಸರಿ
7. 1.5 ಮೀ, 3 ಮೀ, 4.5 ಮೀ, 6 ಮೀ, 7.5 ಮೀ, 9 ಮೀ  
8. 9 ಮೀ



### 9. ಸಮತಲ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

#### ಅಧ್ಯಾಯ - 9.1

- (i) 20 ಚ.ಸೆಂಮೀ (ii) 424 ಚ.ಸೆಂಮೀ (iii) 384 ಚ.ಸೆಂಮೀ
3. 96 ಚ.ಸೆಂಮೀ 4. 96 ಚ.ಸೆಂಮೀ 5. (i) 10700 ಚ.ಮೀ (ii) 10650 ಚ.ಮೀ
- (ii)  $x = 75$  ಸೆಂಮೀ, 45 ಸೆಂಮೀ
- ₹4050
- 337.5 ಚ.ಸೆಂಮೀ

## ಅಧ್ಯಾಯ - 9.2

1. 361 ಚ.ಸಂ.ಮೀ      2. 616 ಚ.ಸಂ.ಮೀ
3. (i) 693 ಚ.ಸಂ.ಮೀ      (ii) 259.87 ಸಂ.ಮೀ<sup>2</sup>
4. 5544 ಸಂ.ಮೀ<sup>2</sup>      5. 308 ಸಂ.ಮೀ<sup>2</sup>      6. 10.5 ಸಂ.ಮೀ<sup>2</sup>      7. 7.868 ಸಂ.ಮೀ<sup>2</sup>
8. (i)  $\frac{6}{7}a^2$       (ii) 123.42 ಸಂ.ಮೀ<sup>2</sup>      9. 6.125 ಸಂ.ಮೀ<sup>2</sup>      10. 346.5 ಮೀ<sup>2</sup>



## 10. ನೇರ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳು

## ಅಧ್ಯಾಯ - 10.1

1. ₹. 84, ₹. 168, ₹. 420, ₹. 546      2. 32, 56, 96, 160
3. ₹. 12,600/-      4. ₹. 2,100/-      5. 21 ಮೀ      6. 6 ಮೀ, 8.75 ಮೀ
7. 168 ಸಂ.ಮೀ      8. 750      9. 25 ಸಂ.ಮೀ,  $\frac{10}{3}$  ಸಂ.ಮೀ.      10.  $\frac{9}{20}$  ಸಂ.ಮೀ      11. 2 : 1

## ಅಧ್ಯಾಯ - 10.2

1. (ii)      2. 120, 60, 80, 80

## ಅಧ್ಯಾಯ - 10.3

1. 4 ಕಿಲೋಗಳು      2. 50 ದಿನಗಳು      3. 48      4. 4      5. 4
6. 15      7. 24      8. 60 ಎ.      9. 40%      10.  $\frac{(x+1)^2}{(x+2)}$



## 11. ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು

## ಅಧ್ಯಾಯ- 11.1

1. (i) 42K      (ii) 6lm      (iii) 15t<sup>4</sup>      (iv) 18mn  
(v) 10p<sup>3</sup>
3. 60a<sup>2</sup>c  
24m<sup>3</sup>n  
36 k<sup>3</sup>l<sup>3</sup>  
24p<sup>2</sup>q<sup>2</sup>r<sup>2</sup>
4. i) x<sup>5</sup>y<sup>3</sup>      ii) a<sup>6</sup>b<sup>6</sup>      iii) k<sup>3</sup>l<sup>3</sup>m<sup>3</sup>      iv) p<sup>2</sup>q<sup>2</sup>r<sup>2</sup>  
v) 72a<sup>2</sup>bcd      5. x<sup>2</sup>y<sup>2</sup>z<sup>2</sup>      6. x<sup>3</sup>y

## ಅಧ್ಯಾಯ - 11.2

1. (ii)  $3k^2l + 3k/m + 3kmn$  (iii)  $a^2b^2 + ab^4 + cb^2c^3$   
(iv)  $x^2yz - 2xy^2z + 3xyz^2$  (v)  $a^4b^3c^3 + a^2b^4c^3d - a^3b^3c^2d^2$
2.  $12y^2 + 16y$
3. i)  $-2$  ii)  $0$
4.  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$  5.  $x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - yz + zx - xr + yr$
6.  $-7x^2 + 8xy$  7.  $-3k^2 + 21kl - 3km$
8.  $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b + a^2c - c^2a$

## ಅಧ್ಯಾಯ - 11.3

1. (i)  $6a^2 - 19a - 36$  (ii)  $2x^2 - 5xy + 2y^2$  (iii)  $k^2l - kl^2 - l^2m + k/m$   
(iv)  $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$
2. (i)  $2x^2 - 3xy + 3x^2y + 3xy^2 - 5y^2$   
(ii)  $3a^2b^2 - a^3b - 2ab^3 - 3a^2bc + 39b^2c$   
(iii)  $klmn - lm^2n - k^2l^2 + kl^2m + k^2lm - k/m^2$   
(iv)  $p^4 - 5p^3q + 6p^3r + pq^3 + 6q^3r - 5q^4$
3. i)  $10x^2 - 14xy$  ii)  $m^3 + n^3$  iii)  $-19a^2 - 34ab + 16ac - 3b^2 + 3c^2$   
iv)  $p^2q^2 - q^2r^2 + p^2qr + pqr^2 - p^2q - pq^2 - p^2r + pr^2$  4. 8

## ಅಧ್ಯಾಯ - 11.4

1. i)  $9k^2 + 24kl + 16l^2$  ii)  $a^2x^4 + 2abx^2y^2 + b^2y^4$   
iii)  $49d^2 - 126de + 81e^2$  iv)  $m^4 + n^4$   
v)  $9t^2 - 81s^2$  vi)  $k^2l^2 - m^2n^2$   
vii)  $36x^2 + 66x + 30$  viii)  $4b^2 - 2ab + 2bc - ca$
2. i) 92416 ii) 259081 iii) 9,84,064 iv) 6,38,401  
v) 89,984 vi) 6391 vii) 11,772 viii) 42,024



## 12. ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

## ಅಧ್ಯಾಯ - 12.1

1. (i) 2, 4, 8 (ii) 3, a, 3a (iii) 7, x, y, 7x, 7y, 7xy (iv) 2, m, m^2, 2m^2, 2m  
(v) 5 (vi) 2, x, 2x (vii) 2, 3, 6, x, y, 2x, 2y, 3x, 3y, 3z, 6x, 6y, 6z

2. i)  $5x(x-5y)$  (ii)  $3a(3a-2x)$  (iii)  $7p(p+7q)$   
 iv)  $12a^2b(3-5c)$  (v)  $3abc(a+2b+3c)$   
 vi)  $p(4p+5q-6q^2)$  (vii)  $t(u+at)$
3. (i)  $(3x-4b)(a-2y)$   
 (ii)  $(x^2+5)(x+2)$  (iii)  $(m+4)(m-n)$   
 (iv)  $(a^2-b)(a-b^2)$  (v)  $(p-1)(pq-r^2)$

### ಅಧ್ಯಾಯ - 12.2

1. (i)  $(a+5)^2$  (ii)  $(l-8)^2$  (iii)  $(6x+8y)^2$  (iv)  $(5x-3y)^2$   
 (v)  $(5m-4n)^2$  (vi)  $(9x-11y)^2$  (vii)  $(x-y)^2$  (viii)  $(l^2+2m^2)^2$
2. (i)  $(x+6)(x-6)$  (ii)  $(7x+5y)(7x-5y)$  (iii)  $(m+11)(m-11)$   
 (iv)  $(9+8x)(9-8x)$  (v)  $(xy+8)(xy-8)$  (vi)  $6(x+3)(x-3)$   
 (vii)  $(x+9)(x-9)$  (viii)  $2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$   
 (ix)  $x^2(9x+11)(9x-11)$  (x)  $(p-q+r)(p-q-r)$   
 (xi)  $4xy$
3. (i)  $x(lx+m)$  (ii)  $7(y^2+5z^2)$  (iii)  $3x^2(x^2+2xy+3z)$   
 (vi)  $(x-a)(x-b)$  (v)  $(3a+4b)(x-2y)$  (vi)  $(m+1)(n+1)$   
 (vii)  $(b+2c)(6a-b)$  (viii)  $(pq-r^2)(p-1)$  (ix)  $(y+z)(x-5)$
4. (i)  $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$  (ii)  $(a^2+b^2+c^2+2bc)(a+b+c)(a-b-c)$   
 (iii)  $(1+m-n)(1-m+n)$  (iv)  $\left(7x+\frac{4}{5}\right)\left(7x-\frac{4}{5}\right)$   
 (v)  $(x^2-y^2)^2$  (vi)  $(5a-b)(5b-a)$
5. (i)  $(a+6)(a+4)$  (ii)  $(x+6)(x+3)$  (iii)  $(p-7)(p-3)$   
 (iv)  $(x-8)(x+4)$  6. 10 7. 0,12

### ಅಧ್ಯಾಯ - 12.3

1. (i)  $8a^2$  (ii)  $\frac{1}{3}x$  (iii)  $9a^2b^2c^2$  (iv)  $\frac{1}{5}yz^2$   
 (v)  $-6l^2m$
2. (i)  $3x-2$  (ii)  $5a^2-7b^2$  (iii)  $x(5x-3)$  (iv)  $l(2l^2-3l+4)$

(v)  $5abc(a - b + c)$  (vi)  $(2q^2 + 3pq - p^2)$

(vii)  $\frac{4}{3}(abc + 2bc)$

3. (i)  $7x - 9$

(ii)  $12x$

(iii)  $\frac{77}{3}ab$

(iv)  $\frac{27}{3}(m+n)$

(v)  $4(x^2 + 7x + 10)$  (vi)  $(a + 1)(a + 2)$

4. (i)  $x + 4$

(ii)  $x - 2$

(iii)  $p + 4$

(iv)  $5a(a - 5)$

(v)  $10m(p - q)$  (vi)  $4z(4z + 3)$

## ಅಧ್ಯಾಯ - 12.4

(i).  $3(x - 9) = 3x - 27$

(ii).  $x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$

(iii).  $2x + 3x = 5x$

(iv).  $2x + x + 3x = 6x$

(v).  $4p + 3p + 2p + p - 9p = p$

(vi).  $3x \times 2y = 6xy$

(vii).  $(3x)^2 + 4x + 7 = 9x^2 + 4x + 7$

(viii).  $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

(ix).  $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$

(x). (a)  $9 - 21 + 12 = 0$  (b)  $9 + 15 + 16 = 30$  (c)  $9 - 15 = -6$

(xi).  $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

(xii).  $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

(xiii).  $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 + ab - 4b^2$

(ix).  $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$

(xv).  $(x - 4)(x - 2) = x^2 + 6x + 8$

(xvi).  $5x^3 \div 5x^3 = 1$

(xvii).  $(2x^3 + 1) \div 2x^3 = 1 + \frac{1}{2x^3}$

(xviii).  $(3x + 2) \div 3x = 1 + \frac{2}{3x}$

(xix).  $(3x + 5) \div 3x = x + \frac{5}{3}$

(xx).  $\frac{4x + 3}{3} = \frac{4}{3}x + 1$



## 13. ಎರಡು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡುವುದು

## ಅಧ್ಯಾಯ - 13.1

3. (i) 5

(ii) 9

(iii) 20

(iv) 14

4. (i) 3 ಚ.ಮಾನಗಳು

(ii) 9 ಚ.ಮಾನಗಳು

(iii) 16 ಚ.ಮಾನಗಳು

(iv) 14 ಚ.ಮಾನಗಳು



ಅಧ್ಯಾಯ-13.2

F	V	E	$V + F = E + 2$
5	6	9	ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸಿದೆ
7	10	15	”
8	12	18	”
6	6	10	”
5	5	8	”
8	12	18	”
8	6	12	”
6	8	12	”

2. ಸಮ, ಪಾದ ಚೌಕವಾಗಿ ಇದೆ                      3. ಅಲ್ಲ                      4. ಹೌದು  
5.  $F = 20, V = 6, E = 12, V + F - E = 2$                       6. ಅಲ್ಲ

V	E
8	12
5	8
6	9

7.                      8. (i) ಷಡ್ಭುಜ ಪಾದ ಗೋಪುರ                      (ii) ಆಯತ ಘನ                      (iii) ಪಂಚಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರ  
(iv) ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ                      (v) ಘನ                      (vi) ಷಡ್ಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರ  
(vii) ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ  
9. (i) a, b, c, d, e                      (ii) ಚತುರ್ಮುಖಿ ಘನ                      (b) ಗೋಳ  
(c) ಘನ/ಆಯತ ಘನ                      (d) ಗೋಳ  
(e) ಘನವು ನಿಯಮಿತ ಬಹುಮುಖಿ ಘನಾಕೃತಿ ಆದರೆ ಆಯತ ಘನ ಬಹುಮುಖಿ ಘನಾಕೃತಿ ಅಲ್ಲ.  
(f) ಘನ, ಆಯತ ಘನ                      (g) ವರ್ಗಪಾದ ಗೋಪುರ  
3. (a) ಅಷ್ಟಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕ                      (b) ಷಡ್ಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕ  
(c) ತ್ರಿಭುಜಪಾದ ಪಟ್ಟಕ                      (d) ಪಂಚಭುಜಪಾದ ಗೋಪುರ

14. ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ-14.1

1. A                      2. 10 ಚ.ಸಂ. ಮೀ                      3. 9 ಚ.ಸಂ. ಮೀ                      4. ₹.72

## ಅಧ್ಯಾಯ - 14.2

1. (i) 112.996 ಮೀ<sup>3</sup>      (ii) 70ಮೀ<sup>3</sup>      (iii) 22.5ಮೀ<sup>3</sup>
2. (i) 13.92ಮೀ<sup>3</sup>, 13920 ಲೀಟರುಗಳು      (ii) 5.2 ಮೀ<sup>3</sup>, 5200 ಲೀಟರುಗಳು  
(iii) 36.792 ಮೀ<sup>3</sup>, 36792 ಲೀಟರುಗಳು
3. ಅದರ ಘನಫಲ  $\frac{7}{8}$  ರಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು
4. (i) 262.144 ಸೆ.ಮೀ<sup>3</sup>      (ii) 2.197ಮೀ<sup>3</sup>      (iii) 4.096ಮೀ<sup>3</sup>
5. 6400      6. 1096 ಸೆ.ಮೀ<sup>3</sup>      7. 110 ಸೆ.ಮೀ<sup>3</sup>
8. 90      9. 27      10. 6 ಸೆ.ಮೀ.



## 15. ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗಿನ ಆಟ

## ಅಧ್ಯಾಯ - 15.1

1. 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು 1200, 836, 780, 4820, 48630  
5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು 1200, 535, 780, 3005, 4820, 48630  
10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು 1200, 780, 4820, 48630  
ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಅದು 2 ಮತ್ತು 5 ರಿಂದಲೂ ಸಹ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ಗ್ರಹಿಸಿದೆವು.
2. (a), (b), (c), (e) ಗಳು 2 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
3. (a), (b), (c) (d) ಗಳು 5 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
4. (a), (b), (d), (e) ಗಳು 10 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
5. (a) 6      (b) 8  
(c) 6      (d) 12
6. 10, 20, 30, 40, 50, 60, .....      7. 6

## ಅಧ್ಯಾಯ - 15.2

1. A = 2 ಅಥವಾ 5 ಅಥವಾ 8      2. A = 8
3. 90, 180, 270, 360, 450 ಇತ್ಯಾದಿ.
4. 0 to 9. 2 ರ ಬಾಹು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಮೇಲೆ ತಪ್ಪು ಉಳಿದ ಸ್ಥಾನಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಡೆದು ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸಿದೆವು.
5. 0 ಅಥವಾ 5      6. 4      7. 7      8. '0'

## ಅಧ್ಯಾಯ - 15.3

1. (a), (d) ಗಳು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
2. (a), (b), (c), (d) ಗಳು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
3. (a), (c), (d) ಗಳು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
4. (a), (b), (c), (d) ಗಳು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
5. (a), (b), (c), (d), (e), (i), (j), (k) ಗಳು ಗಳು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
6. 8 ರ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳು 4ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು
7.  $A = 1$ ,  $B = 9$ ,  $A + B = 10$

## ಅಧ್ಯಾಯ - 15.4

1. 45 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
2. 81 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
3. 36 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
4. 42 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
5. 11 ಮತ್ತು 7 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
6. 5 ಮತ್ತು 7 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
7. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
8. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
9. 2 ಮತ್ತು 4 ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
10. 4 ಮತ್ತು 8 ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
11.  $A = 3$ ,  $B = 2$

## ಅಧ್ಯಾಯ - 15.5

1. (a)  $A = 9$                       (b)  $B = 5$                       (c)  $A = 3$                       (d)  $A = 6$ , ಮೊತ್ತ = 2996  
(e)  $A = 4$ ,  $B = 1$
2. (a)  $A = 5$                       (b)  $A = 8$                       (c)  $A = 9$
3. (a)  $D = 5$ ,  $E = 0$ ,  $F = 1$                       (b)  $C = 1$ ,  $G = 2$ ,  $H = 0$
4. (a)  $K = 6$ ,  $L = 2$                       (b)  $M = 5$ ,  $N = 0$
5.  $A = 8$ ,  $B = 7$ ,  $C = 6$

## అధ్యాయ-15.6

1. 1050
2. 620
3. 216
4.  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$  మూడు అనుక్రమ సంఖ్యల గుణలబ్ధ
5. 'n' అనుక్రమ సంఖ్యల మొత్తం  $\frac{(2n-1)(2n)}{2} = n(2n-1)$  'n' ర అపవర్తన.
6.  $(1^{11} + 4^{11}) + (2^{11} - 3^{11})$ , 5 రించ భాగిసల్పడుత్తదే..
7.  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
8. ₹1200
9. 3050
10.  $166833 - 18 = 166815$ .

## ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆ

ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆ (50 ಗಂಟೆಗಳು)

(i) ಅಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡೋಣ.

(ii) ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(iii) ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಮತ್ತು ವರ್ಗಮೂಲಗಳು, ಘನ ಮೂಲಗಳು.

(i) ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡೋಣ.

- ಎರಡಂಕಿ, ಮೂರಂಕಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ,  $(100a + 10b + c)$  ( $a, b, c$  ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಅಂಕಗಳು) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು, ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು, ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು (ಚತುರ್ವಿದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಥವಾ ಎರಡಂಕಿಗಳ ಬದಲು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೇಳುವುದು? ಮೊದಲಾದವು.
- ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಪದಬಂಧ ಮತ್ತು ಆಟಗಳು - ಪದಬಂದ ಸಾಧಿಸುವುದು, ಅವುಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವುದು.
- ಎರಡು ಅಥವಾ ಮೂರಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ಮತ್ತು 11 ರ ಭಾಜ್ಯನೀಯತೆ ಸೂತ್ರಗಳು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ತರ್ಕ ಮತ್ತು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯತೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

(ii) ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು

- ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿಯಮಗಳು (ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು).
- ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವರ್ಣಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ. ನಿಯಮ/ಗುಣಗಳನ್ನು ಪ್ರಶಂಸಿಸುವುದು.
- ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.
- ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಮರೆತು ಹೋದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದೂ, ಇನ್ನೂ ಇವೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಬಹಳ ಬಹಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಗುರುತಿಸುವುದು.
- ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದು, ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದು. (ಛೇದ 10, 100, .... ಅಲ್ಲದೇ)
- ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು.
- ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಚತುರ್ವಿದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.
- ಪದಸಮಸ್ಯೆಗಳು.

(iii) ವರ್ಗಮೂಲಗಳು, ಘನ ಮೂಲಗಳು.

- ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳು.
- ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿ, ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

	<ul style="list-style-type: none"> <li>ಫೈಥಾಗೋರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳು, ಫೈಥಾಗರೊಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸರಿಮಾಡುವುದು.</li> <li>ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಘನಮೂಲಗಳು (3 ಅಂಕಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿ ಮಾತ್ರವೇ).</li> <li>ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು, ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು. ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅತಿ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿಸುವುದು.</li> <li>ಆವರಣಗಳ ಉಪಯೋಗ.</li> <li>BODMAS ನಿಯಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಆವರಣಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತಿ ಕೆರಿಸುವುದು.</li> </ul>
<p>ಬೀಜಗಣಿತ (20 ಗಂಟೆಗಳು)</p> <p>(i) ಘಾತಾಂಕಗಳು</p> <p>(ii) ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು</p> <p>(iii) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು</p> <p>(iv) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ</p>	<p>(i) ಘಾತಾಂಕಗಳು</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ಘಾತ ಮತ್ತು ಘಾತಾಂಕಗಳು</li> <li>ಘಾತಾಂಕಗಳಾಗಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು</li> <li>ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು</li> </ul> <p>(ii) ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಹ ಗುಣಕಗಳಾಗಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ.</li> <li>ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಮಾಡುವ ತಪ್ಪುಗಳು (e.g. <math>2 + x \neq 2x</math>, <math>7x + y \neq 7xy</math>)</li> <li>ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು</li> <li><math>(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2</math>, <math>a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)</math></li> <li>ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ನಿರೂಪಣೆ.</li> </ul> <p>(iii) ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಧನೆ.</li> <li>ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಗ.</li> <li>ಪದಸಮಸ್ಯೆಗಳು</li> </ul> <p>(iv) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವರ್ತನ ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ.</li> <li>ಪದಗಳನ್ನು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ.</li> <li>ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ.</li> <li><math>(x + a)(x + a)</math> ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅವರ್ತನ.</li> <li>ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಭಾಗಾಕಾರ.</li> </ul>

<p><b>ಅಂಕಗಣಿತ (20 ಗಂಟೆಗಳು)</b></p> <p>(i) ಸಮಾನುಪಾತಗಳಿಂದ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು.</p> <p>(ii) ನೇರ, ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತಗಳು.</p>	<p>(i) ಸಮಾನುಪಾತಗಳಿಂದ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದು.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ಮಿಶ್ರತಮಾನುಪಾತ - ಪದಸಮಸ್ಯೆಗಳು.</li> <li>• ಶೇಖಡಗಳು, ಲಾಭ - ನಷ್ಟ, ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಖರ್ಚುಗಳು, ರಿಯಾಯಿತಿ, ತೆರಿಗೆಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.</li> <li>• ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು (ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮೂರು ಹಂತಗಳಿಗೆ ಪರಿಮಿತ, ಅರ್ಧ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಹಂತಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ಪರಿಮಿತ) ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಮೂಲಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.</li> </ul>
<p><b>ರೇಖಾಗಣಿತ (40 ಗಂಟೆಗಳು)</b></p> <p>(i) ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆಗಳು</p> <p>(ii) 3-D ವಸ್ತುಗಳನ್ನು 2D ಯಾಗಿ ತೋರಿಸುವುದು.</p> <p>(iii) ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ.</p>	<p>(ii) ನೇರ, ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತಗಳು.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ಸುಲಭವಾದ ಪದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು, ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ - ಸುಲಭ ವಾದ ಪದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು, ಮಿಶ್ರತಮಾನುಪಾತ- ಸುಲಭವಾದ ಪದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.</li> <li>• ಕೆಲಸ ಮತ್ತು ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸುಲಭ ಪದಸಮಸ್ಯೆಗಳು.</li> <li>• ದೂರ ಮತ್ತು ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸುಲಭ ಪದಸಮಸ್ಯೆಗಳು.</li> </ul> <p>(i) ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆಗಳು</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ಚತುರ್ಭುಜದ ಗುಣಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ.</li> <li>• ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ -</li> <li>• ಒಂದು ಕೋನ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.</li> <li>• ಒಂದು ಕರ್ಣ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.</li> <li>• ಮೂರು ಕೋನಗಳು, ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.</li> <li>• ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.</li> <li>• ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ.</li> <li>• ವಿಶೇಷ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆಗಳು.</li> </ul>
	<p>(ii) 3-D ವಸ್ತುಗಳನ್ನು 2D ಯಾಗಿ ತೋರಿಸುವುದು.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು, ಹೋಲಿಸುವುದು ( 2-D ಮತ್ತು 3-D ಎರಡು ಜೊತೆಯಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳು, ಜಾಲಗಳು )</li> <li>• 3-D ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ 2-D ಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವುದು.</li> <li>• ಘನ, ಆಯತ ಘನ, ಚತುರ್ಮುಖ ಘನ, ಪಟ್ಟಕ, ಗೋಪುರ, ಮೊದಲಾದವುಗಳ ಶೃಂಗಗಳು, ಅಂಚುಗಳು, ಮುಖಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು, ಯೂಲರ್ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸರಿಮೋಡುವುದು.</li> </ul>

	<p><b>(iii) ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ಸರ್ವಸಮಚಿತ್ರಗಳು,</li> <li>• ಸರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು</li> <li>• ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಪರವಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಮಿತಿ</li> </ul>
<p><b>ಕ್ಷೇತ್ರ ಗಣಿತ (15 ಗಂಟೆಗಳು)</b></p> <p><b>(i) ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು</b></p> <p><b>(ii) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು.</b></p>	<p><b>(i) ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದರ ಅನ್ವಯಿಕೆ.</li> <li>• ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ</li> <li>• ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಆಯತನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು.</li> <li>• ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ವೃತ್ತಾಕಾರದಾರಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.</li> </ul> <p><b>(ii) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ಘನ ಮತ್ತು ಆಯತ ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು.</li> <li>• ಘನ ಫಲ - ಭಾವನೆ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಘನ ಫಲಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು</li> <li>• ಘನ ಫಲ ಮತ್ತು ಸಾಮರ್ಥ್ಯ.</li> </ul>
<p><b>ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ (15 ಗಂಟೆಗಳು)</b></p> <p><b>ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಗಳು.</b></p>	<p><b>ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಗಳು.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ಕಚ್ಚಾ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ.</li> <li>• ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.</li> <li>• ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ ಪರಿಧಿ, ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದು.</li> <li>• ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುದು.</li> <li>• ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡುವುದು.</li> <li>• ಆವರ್ತಾಂಕ ವಕ್ರಗಳು (ಆಯತ ಚಿತ್ರ, ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಿ ವಕ್ರ, ಆಗಿ ವ್ ವಕ್ರಗಳನ್ನು) ಎಳೆಯುವುದು.</li> </ul>



## ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಏನು ಮಾಡಬೇಕು, ಏನನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೋ, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಆ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಣತದಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳ (Contents) ಮೂಲಕ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಸಾಧಿಸ ಬೇಕು.

### 1. ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ :

ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು, ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ ಗಣಿತ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು.

#### (a) ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಧಗಳು

ಪಜಿಲ್, ಪದಬಂಧ ಲೆಕ್ಕಗಳು, ಚಿತ್ರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು, ದತ್ತಾಂಶ ಆವಗಾಹನೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ - ಕೋಷ್ಟಕಗಳು - ಗ್ರಾಫ್ ಪದ್ಧತಿ ಪ್ರಕಾರ ಮಾಡುವ ಮೊದಲಾದ ವಿಧ ವಿಧವಿಧಗಳಾಗಿ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

#### (b) ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ - ಹಂತಗಳು

- ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಓದುವುದು.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುವುದು.
- ಅನುಬಂಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅವಗಾಹನೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಪದ್ಧತಿ ಪ್ರಕಾರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು.

#### (c) ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತತೆ

ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತತೆ ಎನ್ನುವುದು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

- ಅನು ಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು ( ಇದು ಅನು ಸಂಧಾನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸಲಾಗಿದೆ)
- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಂತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
- ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂದರ್ಭ ಸಮಾಚಾರ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಇದೆ ?
- ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ ಸಹಜತ್ವ

#### ತಾರ್ಕಿಕತೆ - ಋಜು

- ನಾನಾವಿಧದ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಸಾಮನ್ಯೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಊಹಾತ್ಮಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ರಚನೆ ಮಾಡುವುದು.

- ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಸರಿನೋಡುವುದು.
- ತಾರ್ಕಿಕ ಚರ್ಚೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಅನುಗಮನ, ನಿಗಮನ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು.

### ತಾರ್ಕಿಕತೆ - ಮುಜು

- ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು, ವ್ಯಾಕರಣಗಳನ್ನು ಓದುವುದು - ಬರೆಯುವುದು ,  
ಉದಾ :  $3 + 4 = 7$ ,  $3 < 5$ ,  $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ , ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ =  $180^\circ$
- ಗಣಿತ ಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಪರಿವಾದ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಂತ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು : ಉದಾ: ಚೌಕ ಎನ್ನುವುದು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಕೋನಗಳಿರುವ ಸಂವೃತ ಚಿತ್ರ .
- ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು ಉದಾ : ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ನಂತರ ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದು/ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ
- ಗಣಿತ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

### ಸಂಬಂಧ / ಅನುಸಂಧಾನ

- ಅನುಬಂಧ ಗಣಿತ, ಪಾಠ್ಯ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು - ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು . ಉದಾ : ಗುಣಾಕಾರ, ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ, ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿನ ಭಾಗಕ್ಕೆ - ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ - ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ, ವಿನ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ - ಸಮಮಿತಿಗಳಿಗೆ; ಅಳತೆಗಳು ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ಅಂತರಾಳ.
- ದೈನಂದಿನ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು.
- ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು.
- ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅನು ಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು. ಉದಾ: ದತ್ತಾಂಶದ ಶೇಖರಣೆ ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತ; ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರದೇಶ.
- ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಬಹುಳ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು .

### ದೃಶ್ಯೀಕರಣ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವ.

- ಪಟ್ಟಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರ, ಸಂಖ್ಯೆ ರೇಖೆ, ರೇಖಾ ಚಿತ್ರ, ಆಯತ ಚಿತ್ರ, 2-D ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು 3-D ಆಕೃತಿಗಳು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಓದುವುದು.
- ಪಟ್ಟಿಕೆಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸುವುದು, ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವುದು. ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು, ಆಯತಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು.
- ಗಣಿತದ ಚಿತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳು